

Insinöörimatematiikka 4u
Periodi 4/2011–2012

Janne Kauhanen

TTY
Matematiikan laitos
janne.kauhanen@tut.fi

Alkusanat

Tämä moniste on laadittu TTY:n opintojaksolle Insinöörimatematiikka 4u. Moniste ei ole kattava itseopiskelupaketti, vaan se on tarkoitettu käytettäväksi luentojen seuraamisen, kurssikirjan lukemisen ja harjoitustehtävien ratkomisen tukena. Kurssilla käydään läpi kurssikirjan [7] luvut 12–14 soveltuvilta osin.

Muutokset edellisen lukuvuoden monisteeseen: todistuksia, esimerkkejä ja kuvia on lisätty ja joitakin osia on kirjoitettu uusiksi. Kiitän rinnakkaisia luentoryhmiä viime vuonna luennoineita Kimmo Vattulaista ja Lasse Vehmasta lukuisista kommentteista.

Tässä monisteessa havaittujen painovirheiden listaa pidetään yllä toteutuskerran MAT-10442 Insinöörimatematiikka B 4u (MAT-10442 2011-01) sivulla POPissa. Kommentteja painovirheistä ja monisteesta yleisemminkin voi lähettää sähköpostitse kirjoittajalle: janne.kauhanen@tut.fi.

Janne Kauhanen

Sisältö

1	Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa	5
1.1	Käyrä	5
1.2	Usean muuttujan reaaliarvoiset funktiot	11
1.2.1	Funktion kuvaaja ja tasa-arvokäyrät	11
1.3	Raja-arvo ja jatkuvuus	14
1.3.1	Pallot ja kiekot	14
1.3.2	Raja-arvo	15
1.3.3	Jatkuvuus	20
1.4	Osittaisderivaatat	22
1.4.1	Kahden muuttujan funktiot	22
1.4.2	Tangenttitaso	24
1.4.3	Kolmen ja useamman muuttujan funktiot	26
1.4.4	Korkeammat osittaisderivaatat	27
1.5	Lokaalit ja globaalit ääriarvot	29
1.5.1	Avoimet ja suljetut joukot	30
1.5.2	Ääriarvojen hakeminen suljetussa ja rajoitetussa joukossa	31
1.5.3	Ääriarvot joukossa, joka ei ole suljettu ja rajoitettu	37
1.6	Lineaarinen approksimointi ja differentioituvuus	39
1.6.1	Kahden muuttujan funktiot	39
1.6.2	Derivaattamatriisi ja $n:n$ muuttujan funktiot	43
1.7	Vektoriaarvoiset funktiot ja ketjusääntö	48
1.7.1	Raja-arvo ja jatkuvuus	50
1.7.2	Differentioituvuus	53
1.7.3	Ketjusääntö	57
1.7.4	Käänteiskuvauslause	62
1.8	Suunnattu derivaatta ja gradientti	63
1.9	Sidotut ääriarvot ja Lagrangen menetelmä	71
1.10	Taylorin kaava	75
1.11	Lokaalien ääriarvojen laatu	82
1.12	Pienimmän neliösumman menetelmä	86
2	Taso- ja avaruusintegraali	89
2.1	Kertaus: reaali funktion integraali	89
2.2	Tasointegraali suorakulmiossa	90
2.3	Tasointegraali projisoituvissa joukoissa	95
2.4	Tasointegraalin laskeminen napakoordinaateilla	108
2.5	Avaruusintegraali	114
2.6	Avaruusintegraalin laskeminen sylinteri- ja pallokoordinaateilla	119

2.6.1	Sylinterikoordinaatit	119
2.6.2	Pallokoordinaatit	121
2.7	Massa ja massakeskipiste	123
2.8	Epäoleelliset integraalit	125
2.8.1	Rajoittamaton integroimisjoukko	126
2.8.2	Rajoittamaton funktio	127
2.9	Yleinen muuttujanvaihto	129
2.9.1	Tasointegraali	129
2.9.2	Avaruusintegraali	132
Liite: Matlab-esimerkkejä		135
Lähteitä ja kirjallisuutta		136
Hakemisto		137

1 Usean muuttujan funktion differentiaalilas- kentaa

Tällä opintojaksolla tarkastellaan funktioita $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Funktion f sanotaan olevan

- *reaalifunktio*, jos $n = m = 1$,
- *yhden muuttujan funktio*, jos $n = 1$,
- *usean muuttujan funktio*, jos $n > 1$,
- *reaaliarvoinen funktio*, jos $m = 1$, ja
- *vektoriarvoinen funktio*, jos $m > 1$.

Esimerkki 1.1. a) $f(x) = 1 - x^2$ on yhden muuttujan reaaliarvoinen funktio (eli reaalifunktio). Määrittelyjoukko on \mathbb{R} ja maalijoukko \mathbb{R} , ts. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 2x + 1)$ on yhden muuttujan vektoriarvoinen funktio.

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y - 1$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio.

d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2, xy - 1, 3y)$ on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio.

1.1 Käyrä

Aloitetaan tutkimalla yhden muuttujan vektoriarvoista funktiota

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (1.2)$$

Funktioita $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan \mathbf{r} :n *koordinaattifunktioksi* tai *komponenttifunktioiksi*. Tapauksessa $n = 2$ merkitään usein

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

ja tapauksessa $n = 3$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Vektoriarvoisen funktion (1.2) raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta määritellään tarkemmin luvussa 1.7 ja erityisesti derivaattavektoria pohditaan opintojaksolla Vektorianalyysi. Esitellään nämä ominaisuudet tässä luvussa siinä laajuudessa kuin niitä tällä opintojaksolla tarvitaan.

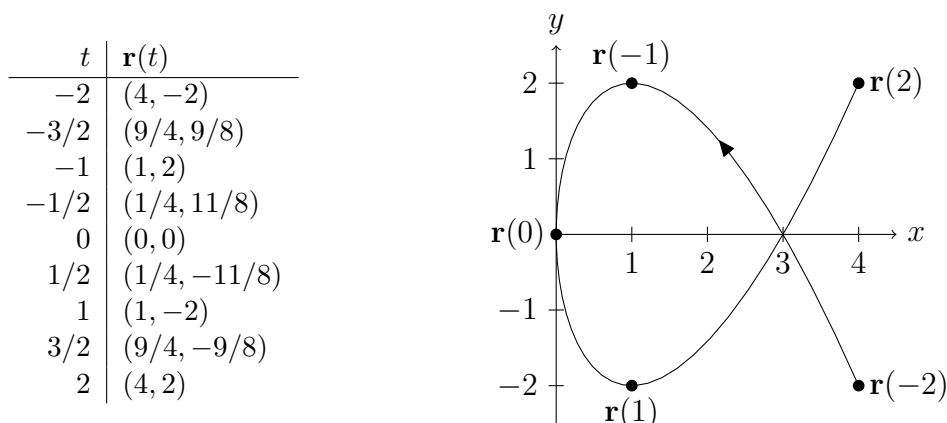
Määritelmä 1.3. Vektoriarvoinen funktio (1.2) on *jatkuva* (*continuous*), jos kaikki koordinaattifunktiot $x_i(t)$ ovat jatkuvia.

Geometrisesti jatkuvuus tapauksessa $n = 2$ tarkoittaa sitä, että ”kuva voidaan piirtää kynää nostamatta”.

Määritelmä 1.4. Jos funktio $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuva, niin sitä kutsutaan *parametrisoiduksi käyräksi* (*parametric curve*). Kuvajoukko $C = \mathbf{r}([a, b]) = \{\mathbf{r}(t) : t \in [a, b]\}$ on *käyrän jälki* tai lyhyesti *käyrä*. Kun $n = 2$, puhutaan *tasokäyrästä* ja kun $n = 3$, puhutaan *avaruuskäyrästä*. Pistettä $\mathbf{r}(a)$ kutsutaan *käyrän alkupisteeksi* ja pistettä $\mathbf{r}(b)$ *loppupisteeksi*.

Tasokäyrää \mathbf{r} voidaan havainnollistaa piirtämällä pisteet $(x(t), y(t))$ muutamilla t :n arvoilla ja yhdistämällä näin saadut pisteet.

Esimerkki 1.5. Kuva käyrästä $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $-2 \leq t \leq 2$:



Käyrän jälki C voidaan ilmoittaa myös muulla tavoin kuin antamalla lauseke $\mathbf{r}(t)$, jolloin tarvittaessa muodostetaan *parametrisointi* (*parametrization*) $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle $\mathbf{r}([a, b]) = C$. On huomattava, että käyrällä C on aina äärettömän monta erilaista parametrisointia.

Esimerkki 1.6. Yksikköympyrän $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ parametrisoinniksi otetaan yleensä

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Tätä parametrisointia muokkaamalla saadaan C :lle samantapaisia parametrisointeja, joissa on eri vauhti, kiertosuunta tai alku- ja loppupiste:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos(t), -\sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t + \pi/2), \sin(t + \pi/2)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 5\pi.$$

Näistä viimeisessä parametrisoinnissa kierretään yksikköympyrä 2,5 kertaa. Yleensä pyritään valitsemaan parametrisointi, jossa käyrä leikkaa itsensä korkeintaan alku- ja loppupisteissä. Tällöin sanotaan, että käyrä (parametrisointi) on *yksinkertainen* (*simple*).

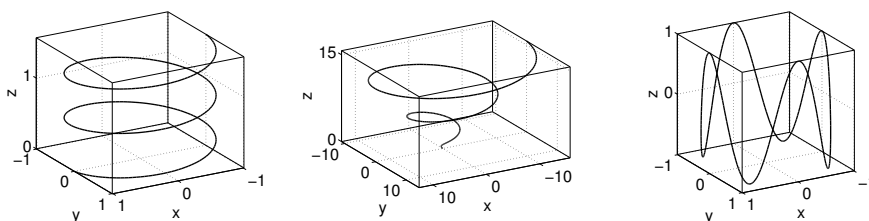
Esimerkki 1.7. Tarkastellaan avaruuskäyriä

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/10), \quad 0 \leq t \leq 5\pi \text{ (ruuvikäyrä, helix),}$$

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 5\pi,$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos(4t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Miksi parametrisoinnit tuottavat seuraavanlaiset jäljet?



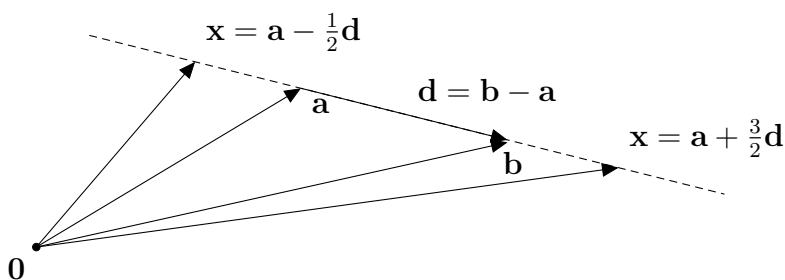
Käyrän määrittelyväliksi voidaan suljetun ja rajoitetun välin $[a, b]$ sijasta ottaa myös mikä tahansa väli $I \subset \mathbb{R}$ (avoin, puoliavoin tai rajoittamaton).

Huomautus 1.8. Pisteiden \mathbf{a} ja \mathbf{b} kautta kulkevan suoran *virittäjävektoriksi* voidaan valita $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, jolloin \mathbf{x} on suoralla jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Pistettä \mathbf{a} kutsutaan *kauttakulkupisteeksi*. Seuraavaan kuvaan on piirretty pisteet \mathbf{x} t :n arvoilla $t = -\frac{1}{2}$, $t = 0$ (piste \mathbf{a}), $t = 1$ (piste \mathbf{b}) ja $t = \frac{3}{2}$. Suoran parametrisoinniksi käy siis

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

ja pisteitä \mathbf{a} ja \mathbf{b} yhdistävän janan parametrisoinniksi

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.10)$$



Esimerkki 1.11. Missä pisteessä pisteiden $(1, 2, 3)$ ja $(6, 5, 4)$ kautta kulkeva suora leikkaa yz -tason?

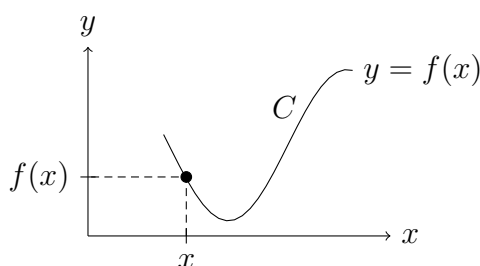
Ratkaisu. Parametrisoidaan suora:

$$\mathbf{r}(t) = (1, 2, 3) + t((6, 5, 4) - (1, 2, 3)) = (5t + 1, 3t + 2, t + 3).$$

yz -tasolla x -koordinaatti on 0, ts. $5t + 1 = 0$, josta $t = -\frac{1}{5}$. yz -tason leikkauspiste on siis $\mathbf{r}(-\frac{1}{5}) = (0, \frac{7}{5}, \frac{14}{5})$.

Huomautus 1.12. Jatkuvan funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaajalle $y = f(x)$ voidaan ottaa parametrisoinniksi

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b].} \quad (1.13)$$



Esimerkki 1.14. a) Käyrän $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, parametrisoinniksi käy $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

b) Esimerkin 1.6 yksikköympyrällä $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, jote se voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}), & \text{kun } -1 \leq t \leq 1, \\ (2-t, -\sqrt{1-(2-t)^2}), & \text{kun } 1 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Vektoriarvoisen funktion raja-arvoa tutkitaan tarkemmin vasta luvussa 1.7, mutta käytetään sitä jo tässä derivaatan määrittelemiseen:

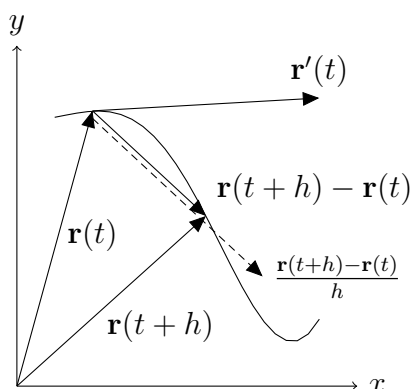
Määritelmä 1.15. Käyrä \mathbf{r} on *derivoituva* (*differentiable*) pisteessä $t \in [a, b]$, jos on olemassa raja-arvo

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

ja *derivoituva*, jos \mathbf{r} on derivoituva jokaisella $t \in [a, b]$. Raja-arvoa $\mathbf{r}'(t)$ (ja funktiota $\mathbf{r}': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$) kutsutaan *derivaataksi* tai *derivaattavektoriksi*.

Käyrän derivaatalle käytetään myös merkintöjä

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = D_t(\mathbf{r}(t)).$$



Geometrinen tulkinta derivaatalle on, että jos $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, niin $\mathbf{r}'(t)$ on käyrän *tangenttivektori* pisteessä $\mathbf{r}(t)$.

Luvun 1.7 tuloksista seuraa:

Lause 1.16. *Käyrä $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ on derivoituva jos ja vain jos kaikki koordinaattifunktiot $x_i(t)$ ovat derivoituvia. Tällöin*

$$\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Toisin sanoen: käyrä derivoidaan koordinaateittain.

Määritelmä 1.17. Monissa sovelluksissa parametri t on aika ja $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ on massapisteen paikka ajanhetkellä t , jolloin käyrän jälki $C = \mathbf{r}([a, b])$ kuvaa massapisteen kulkemaa reittiä aikavälillä $a \leq t \leq b$. Tällöin määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) && \text{nopeus (velocity)} \\ v(t) &= \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} && \text{vauhti (speed)} \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) && \text{kiihtyvyys (acceleration)} \end{aligned}$$

Esimerkki 1.18. Olkoon kappaleen paikka $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ajanhetkellä t . Laske nopeus, vauhti ja kiihtyvyys kappaleen ollessa pisteessä $(2, 4, 8)$.

Ratkaisu. Nyt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= (1, 2t, 3t^2), \\ v(t) &= \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \quad \text{ja} \\ \mathbf{a}(t) &= (0, 2, 6t). \end{aligned}$$

Kappale on kyseisessä pisteessä hetkellä $t = 2$, sillä $\mathbf{r}(2) = (2, 4, 8)$. Siten kysytty nopeus on $\mathbf{v}(2) = (1, 4, 12)$, vauhti $v(2) = \sqrt{161}$ ja kiihtyvyys $\mathbf{a}(2) = (0, 2, 12)$.

Esimerkki 1.19. Tarkastellaan esimerkin 1.5 käyrää $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $-2 \leq t \leq 2$.

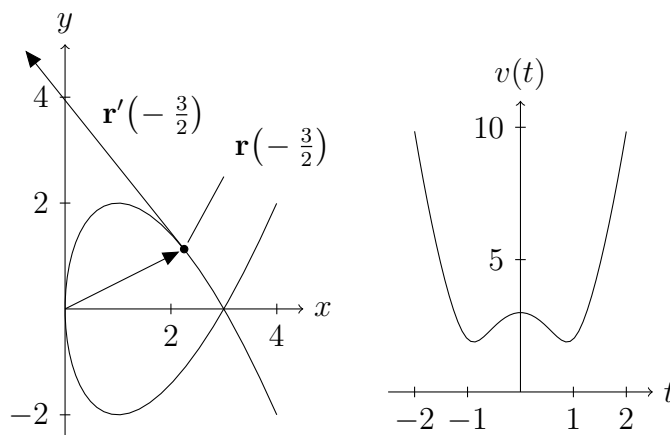
a) Laske tangenttivektori käyrän pisteeseen $(9/4, 9/8)$.

b) Missä pisteissä käyrällä on vaakasuora tangentti?

c) Mitkä ovat käyrän ja x -akselin leikkauspisteet?

d) Tutki vauhtia $v(t)$.

Ratkaisu. a) Derivaatta on $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2 - 3)$. Koska $\mathbf{r}(-3/2) = (9/4, 9/8)$, niin kysytty derivaattavektori on $\mathbf{r}'(-3/2) = (-3, 15/4)$.

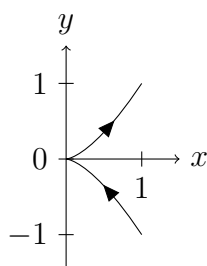


b) Käyrällä on vaakasuora tangentti, kun $y'(t) = 0$ (ja $x'(t) \neq 0$). $y'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Käyrällä on vaakasuora tangentti siis pisteissä $\mathbf{r}(-1) = (1, 2)$ ja $\mathbf{r}(1) = (1, -2)$.

c) x -akselin leikkauspisteissä $y(t) = 0$, ts. $t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ tai $t = \pm\sqrt{3}$. Leikkauspisteet ovat siis $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ ja $\mathbf{r}(-\sqrt{3}) = \mathbf{r}(\sqrt{3}) = (3, 0)$.

d) Vauhti $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = \sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}$ on suurimmillaan alkupisteessä $\mathbf{r}(-2) = (4, -2)$ ja loppupisteessä $\mathbf{r}(2) = (4, 2)$ ja pienimmillään t :n arvoilla $t \approx \pm 0,88$ pisteissä $\mathbf{r}(-0,88) \approx (0,78; 1,96)$ ja $\mathbf{r}(0,88) \approx (0,78; -1,96)$ (ks. $v(t)$:n kuvaaja).

Pohditaan vielä, milloin käyrän \mathbf{r} jälki C näyttää "siistiltä" käyrältä. Käyrässä voi olla kärkiä, vaikka käyrä olisi derivoituva ja derivaattavektori jatkuva. Tästä käy esimerkiksi käyrä $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, $-1 \leq t \leq 1$:



Tälle käyrälle $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2)$, joten $\mathbf{r}'(0) = (0, 0)$. Vauhti pysähtyy origossa $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$, johon on silloin mahdollista muodostua kärki, vaikka $\mathbf{r}'(t)$ onkin jatkuva. Seuraava ehto takaa, että käyrä näyttää sileältä.

Määritelmä 1.20. Käyrä $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *sileä* (*smooth*), jos \mathbf{r}' on jatkuva ja $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ kaikilla $t \in [a, b]$.

Esimerkki 1.21. Esimerkin 1.7 ruuvikäyrä $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$ on sileä, sillä $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1/10)$ on jatkuva ja $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ kaikilla t .

1.2 Usean muuttujan reaaliarvoiset funktiot

Tarkastellaan seuraavaksi usean muuttujan reaaliarvoisia funktioita $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Usein tiedetään vain funktion lauseke, eikä määrittelyjoukkoa D erikseen ilmoiteta. Tällöin määrittelyjoukoksi otetaan suurin mahdollinen joukko, jossa funktio on määritelty. Lisäksi yksinkertaisuuden vuoksi merkitsemme jatkossa $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vaikka f :n määrittelyjoukko ei olisikaan koko \mathbb{R}^n . Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ arvoa pisteessä $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ merkitään

$$f(\mathbf{x}) = f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Esimerkeissämme useimmiten $n = 2$ tai 3 :

- Kahden muuttujan funktio f liittää jokaiseen määrittelyjoukkonsa alkioon (x, y) reaaliluvun $f(x, y)$.
- Kolmen muuttujan funktio f liittää jokaiseen määrittelyjoukkonsa alkioon (x, y, z) reaaliluvun $f(x, y, z)$.

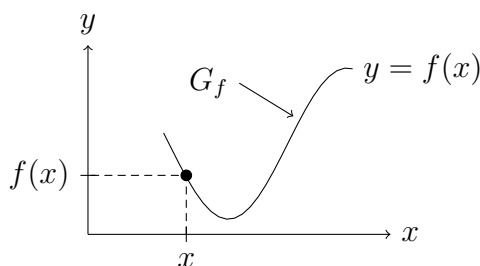
1.2.1 Funktion kuvaaja ja tasa-arvokäyrät

n :n muuttujan reaaliarvoista funktiota $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan havainnollistaa geometrisesti esim. seuraavasti:

$n = 1$ Reaalifunktion $f(x)$ kuvaaja (*graph*)

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

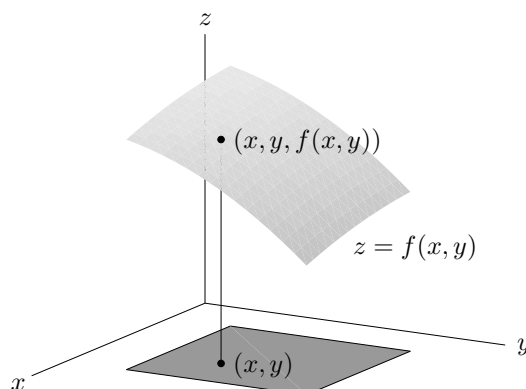
voidaan piirtää xy -koordinaatistoon.



$n = 2$ a) Funktion $f(x, y)$ kuvaaja

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

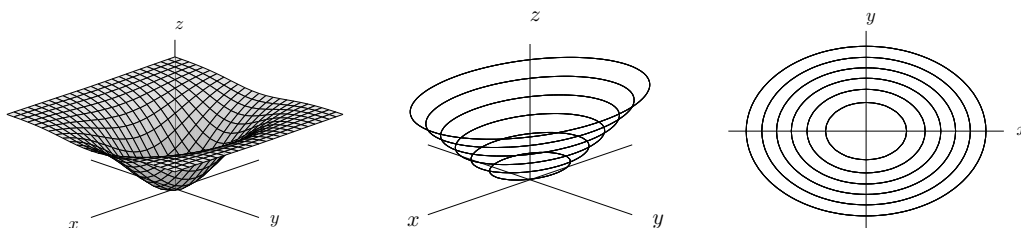
voidaan piirtää xyz -koordinaatistoon.



b) Funktion $f(x, y)$ käyttäytymistä voidaan havainnollistaa ”korkeuskäyrillä” eli *tasa-arvokäyrillä* (*contour curve*, *level curve*)

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

xy -koordinaatistossa.



$n = 3$ Funktion $f(x, y, z)$ käyttäytymistä voidaan havainnollistaa *tasa-arvopinnoilla* (*level surface*)

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

xyz -koordinaatistossa.

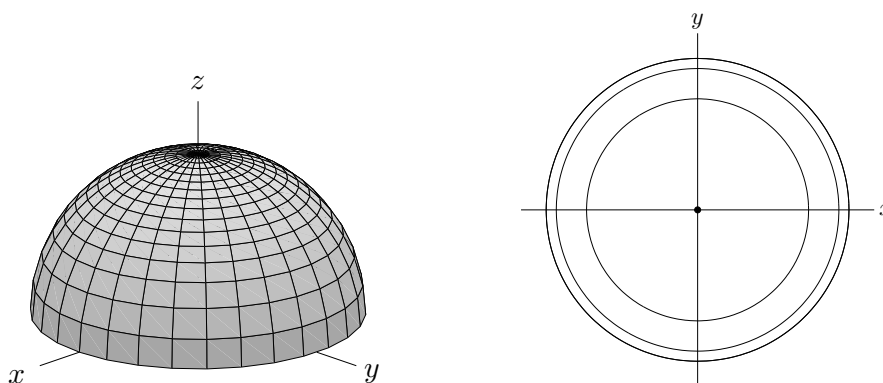
Esimerkki 1.22. Funktion $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ määrittelyjoukko on

$$M_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\},$$

toisin sanoen f on määritelty xy -tason origokeskisessä 3-säteisessä kiekossa. Selvästi f :n pienin arvo on 0 ja suurin $\sqrt{9} = 3$, joten arvojoukko on $A_f = [0, 3]$. Kuvaajan pisteille (x, y, z) pätee $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \geq 0$, josta saadaan neliömällä $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Kuvaaja on siis origokeskisen 3-säteisen pallopinnan puolikas. Tasa-arvokäyriksi ratkaistaan

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} = c \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 - c^2}.$$

Arvoilla $c = 0, 1, 2, 3$ tasa-arvokäyrät $f(x, y) = c$ ovat siis origokeskisiä ympyröitä, joiden säteet ovat noin 3, 2,8, 2,2 ja 0.



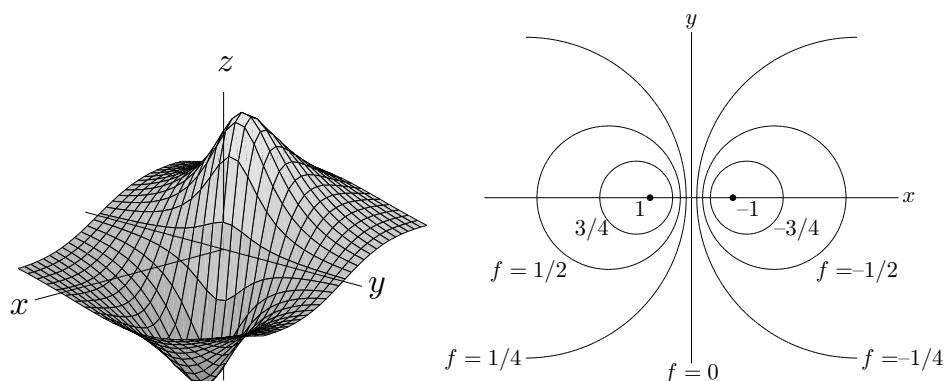
Esimerkki 1.23. Selvitetään funktion

$$f(x, y) = \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

tasa-arvokäyrät:

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 1} = c \stackrel{c \neq 0}{\Leftrightarrow} \left(x + \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} - 1.$$

Tasa-arvokäyrät ovat siis ympyröitä, kun $c \neq 0$. Kun $c = 0$, on $x = 0$, joten kyseinen tasa-arvokäyrä on y -akseli. Oheisissa kuvissa esitetään funktion kuvaaja ja muutamia tasa-arvokäyriä.



1.3 Raja-arvo ja jatkuvuus

1.3.1 Pallot ja kiekot

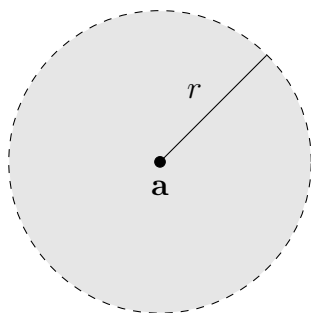
Olkoon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. \mathbf{a} -keskinen r -säteinen avoin pallo (open ball) eli \mathbf{a} :n palloympäristö (environment), merkitään $B(\mathbf{a}, r)$, on niiden pisteiden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ joukko, joiden etäisyys keskipisteestä \mathbf{a} on pienempi kuin r , ts.

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}.$$

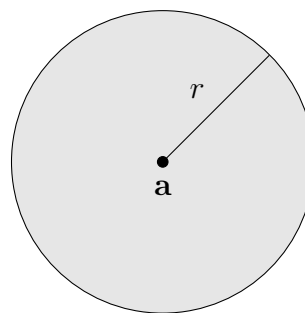
Suljettu pallo (closed ball) on joukko, jossa pallon reuna on mukana:

$$\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}.$$

Poistamalla avoimesta pallosta keskipiste saadaan pisteen \mathbf{a} punkteerattu ympäristö $B(\mathbf{a}, r) \setminus \{\mathbf{a}\}$. Tasossa ($n = 2$) pallosta voidaan käyttää nimitystä kiekko.



avoin pallo $B(\mathbf{a}, r)$



suljettu pallo $\overline{B}(\mathbf{a}, r)$

\mathbb{R}^2 :ssa voidaan merkitä $\mathbf{x} = (x, y)$ ja $\mathbf{a} = (a, b)$, jolloin

$$B(\mathbf{a}, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$$

ja \mathbb{R}^3 :ssa $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ja $\mathbf{a} = (a, b, c)$, jolloin

$$B(\mathbf{a}, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r\}.$$

1.3.2 Raja-arvo

Muistetaan, että reaalifunktiolla f on raja-arvo L pisteessä a , jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tämän määritelmän yleistäminen useamman muuttujan funktioille on suoraviivaista: määrittelyjoukon itseisarvo $|x - a|$ korvataan normilla $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$.

Määritelmä 1.24. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Tällöin funktiolla f on *raja-arvo (limit)* $L \in \mathbb{R}$ pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, merkitään

$$L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \quad \text{tai} \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow L, \text{ kun } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a},$$

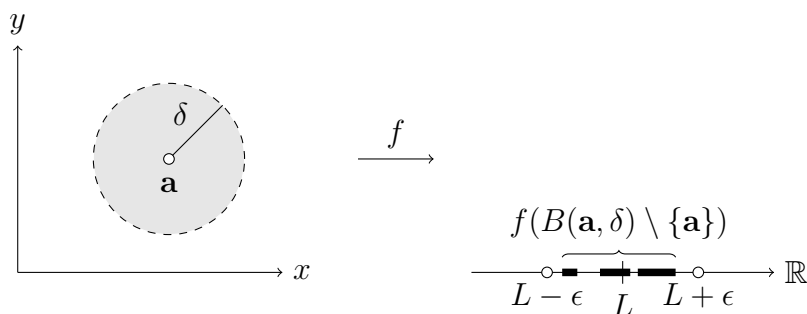
jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon. \quad (1.25)$$

Määritelmän ehto (1.25) tarkoittaa, että \mathbf{a} -keskinen δ -säteinen punkteerattu pallo kuvautuu L -keskiselle ϵ -säteiselle välille, ts.

$$f(B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Kaaviokuva tapauksesta $n = 2$:



Raja-arvon määritelmässä ei vaadita, että f olisi määritelty pisteessä \mathbf{a} . Voidaan esimerkiksi tutkia, onko funktiolla

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2z}{x^2 + z^2}$$

raja-arvoa pisteessä $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$. Raja-arvon määritelmä on kuitenkin mielekäs vain sellaisille \mathbf{a} , joille kaikilla (mielivaltaisen pienillä) $\delta > 0$ on olemassa ehdon $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ toteuttavia f :n määrittelyjoukon $D \subset \mathbb{R}^n$ pisteitä \mathbf{x} . Esimerkiksi ei ole mielekästä kysyä, onko funktiolla

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

raja-arvoa pisteessä $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, sillä f ei ole määritelty yksikköpallossa $\bar{B}((0, 0, 0), 1)$. Edellä kuvatun ehdon täyttävää pistettä \mathbf{a} sanotaan D :n kasautumispisteeksi:

Määritelmä 1.26. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$. Piste $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ on joukon D kasautumispiste (limit point, accumulation point), jos jokaisessa \mathbf{a} :n punkteeratussa ympäristössä $B(\mathbf{a}, r) \setminus \{\mathbf{a}\}$ on D :n pisteitä, ts. $(B(\mathbf{a}, r) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$.

Lemma 1.27. Olkoon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja merkitään $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Tällöin $x_i \rightarrow a_i$, kun $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Väitetään, että funktion $f(\mathbf{x}) = x_i$ raja-arvo pisteessä \mathbf{a} on $L = a_i$. Nyt

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - L| &= |x_i - a_i| = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \epsilon, \end{aligned}$$

kun määritelmässä 1.24 valitaan $\delta = \epsilon$. □

Lause 1.28. Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ ja $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = M$, niin

- (1) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) = L \pm M$,
- (2) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = LM$,
- (3) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L}{M}$, jos $M \neq 0$.

Jos lisäksi $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä L , niin

- (4) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(f(\mathbf{x})) = F(L)$.

Todistus. Todistukset ovat oleellisesti samat kuin reaalfunktiolle (ks. [11, lauseet 4.5 ja 4.12]), kun korvataan $|x - a|$ normilla $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$. \square

Esimerkki 1.29. a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,\pi/3)} x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-3,1,2)} \frac{2x - yz^2}{\sqrt{2z}} = \frac{-6 - 4}{2} = -5$

Tapauksissa $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ on käytettävä määritelmää tai lauseen 1.31 kuristusperiaatetta.

Esimerkki 1.30. Osoita, että

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Ratkaisu. Kyseessä on $\frac{0}{0}$ -tilanne. Käytetään raja-arvon määritelmää. Valitaan $\epsilon > 0$. Koska [11, lause 4.19]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

niin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$\left| \frac{\sin t}{t} - 1 \right| < \epsilon, \quad \text{kun } |t| < \delta_1.$$

Jos nyt

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\delta_1},$$

niin $x^2 + y^2 < \delta_1$ ja siten

$$\left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right| < \epsilon.$$

Raja-arvon määritelmässä 1.24 voidaan siten valita $\delta = \sqrt{\delta_1}$.

Lause 1.31 (Kuristusperiaate, Squeeze Law).

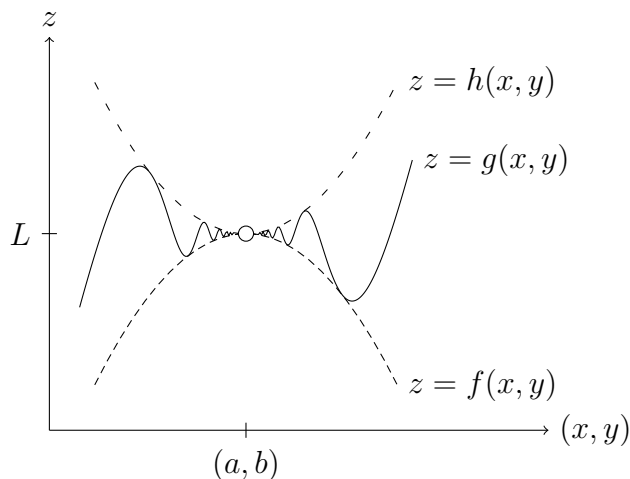
Jos $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ jossakin pisteen \mathbf{a} punkteeratussa ympäristössä ja

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = L,$$

niin

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = L.$$

Todistus. Sivuutetaan. Havainnollistetaan tilannetta geometrisesti kahden muuttujan funktioille $f(x, y)$, $g(x, y)$ ja $h(x, y)$ pisteessä (a, b) xyz -avaruuden poikkileikkauksella. \square



Esimerkki 1.32. Osoita, että

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

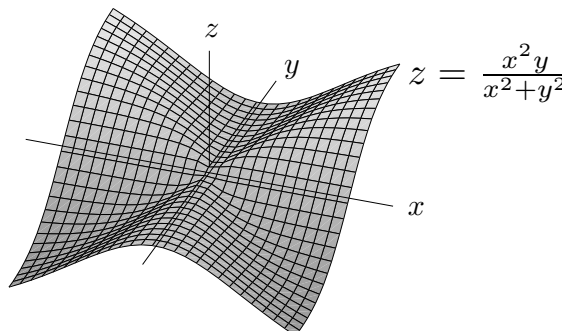
Ratkaisu. Funktiolle $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ pätee

$$0 \leq |g(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y|,$$

joten

$$-|y| \leq g(x, y) \leq |y|.$$

Koska $f(x, y) = -|y| \rightarrow 0$ ja $h(x, y) = |y| \rightarrow 0$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, niin kuristusperiaatteen mukaan $g(x, y) \rightarrow 0$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.



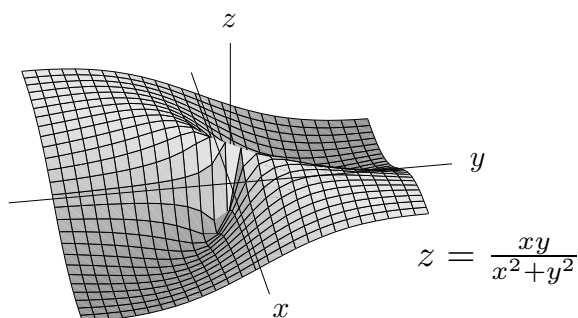
Voidaan myös tutkia, onko raja-arvo olemassa lähestyttäessä rajapistettä \mathbf{a} jotakin tiettyä käyrää pitkin. Jos funktiolla on raja-arvo, niin raja-arvo on sama jokaista käyrää pitkin lähestyttäessä. Tätä voidaan käyttää hyväksi osoitettaessa, että funktiolla ei ole raja-arvoa.

- Jos kahdella eri lähestymistiellä saadaan eri raja-arvot, niin raja-arvoa ei ole olemassa.
- Raja-arvon olemassaoloa ei tällä menetelmällä voida todistaa: funktiolla voi esimerkiksi olla sama raja-arvo lähestyttäessä kaikkia rajapisteen kautta kulkevia suoria pitkin, vaikka funktiolla ei olisikaan raja-arvoa. Ks. [7], harjoitustehtävä 13.3.51.

Esimerkki 1.33. Funktio

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

on nolla koordinaattiakseleilla (eli kun $x = 0$ tai $y = 0$), suoralla $y = x$ on $f(x, y) = 1/2$ ja suoralla $y = -x$ on $f(x, y) = -1/2$. Origoa lähestyttäessä saadaan erisuuret raja-arvot eri suunnista, joten funktiolla ei ole raja-arvoa origossa.



Esimerkki 1.34. Epäoleelliset raja-arvot $\pm\infty$ voidaan määritellä samaan tapaan kuin opintojaksolla Insinöörimatematiikka 1u.

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty,$$

sillä $x^2 + y^2 > 0$ kaikilla x ja y ja $x^2 + y^2 \rightarrow 0$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

b) Ei ole olemassa raja-arvoa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right),$$

sillä **a**-kohdan mukaan sinin sisäfunktio $1/(x^2 + y^2) \rightarrow \infty$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, joten tutkittava funktio saa kaikissa $(0, 0)$:n ympäristöissä kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$ eli heilahtelee rajusti origon lähellä.

1.3.3 Jatkuvuus

Jos raja-arvon määritelmässä f on määritelty pisteessä \mathbf{a} , niin voidaan kysyä, onko raja-arvo sama kuin funktion arvo pisteessä \mathbf{a} .

Määritelmä 1.35. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio ja olkoon $\mathbf{a} \in D$ f :n määrittelyjoukon $D \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste. Tällöin f on *jatkuva* (*continuous*) pisteessä \mathbf{a} , jos

$$f(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}).$$

Jos f on jatkuva kaikissa D :n pisteissä, niin f on *jatkuva*. (Sovitaan, että D :n muissa pisteissä kuin kasautumispisteissä f on jatkuva.)

f :n jatkuvuuteen pisteessä \mathbf{a} vaaditaan siis (jos \mathbf{a} on D :n kasautumispiste):

- f on määritelty pisteessä \mathbf{a} ,
- f :llä on raja-arvo pisteessä \mathbf{a} ja
- f :n arvo ja f :n raja-arvo ovat yhtäsuuret.

Lause 1.36. Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä \mathbf{a} , niin myös funktiot $f + g$, fg ja f/g (jos $g(\mathbf{a}) \neq 0$) ovat jatkuvia pisteessä \mathbf{a} . Jos lisäksi $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $f(\mathbf{a})$, on $F \circ f$ jatkuva jatkuva pisteessä \mathbf{a} .

Todistus. Seuraa raja-arvon laskusäännöistä (lause 1.28). \square

Määritelmä 1.37. Funktio $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on k -asteinen polynomi, jos P on muotoa

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq k} c_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \quad (c_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{R})$$

ja *rationaalifunktio* on muotoa $R(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}$ oleva funktio, missä P ja Q ovat polynomeja.

Polynomit ja rationaalifunktiot ovat lauseen 1.36 mukaan jatkuvia määrittelyjoukoissaan.

Esimerkki 1.38. a) 5. asteen polynomi $f(x, y) = 3x^4 - 7xy^2 - x^2y^3 + 10$ on jatkuva \mathbb{R}^2 :ssa.

b) Rationaalifunktio

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm x\}$.

c) Funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

on rationaalifunktiona jatkuva joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja esimerkin 1.32 mukaan f on jatkuva myös pisteessä $(0, 0)$. f on siis jatkuva koko määrittelyjoukossaan \mathbb{R}^2 . Esimerkin 1.32 funktio saatiin siis määrittelyllä $f(0, 0) = 0$ jatkettua jatkuvaksi funktioksi myös pisteeseen $(0, 0)$.

d) Funktio

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mutta esimerkin 1.33 mukaan sitä ei saada jatkettua jatkuvaksi pisteeseen $(0, 0)$.

1.4 Osittaisderivaatat

1.4.1 Kahden muuttujan funktiot

Reaalifunktiolle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivaatta pisteessä a määritellään erotusosamäärän raja-arvona

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaatta antaa f :n hetkellisen muutosnopeuden pisteessä a . Vastaavalla tavoin voidaan tutkia kahden (ja useamman) muuttujan reaaliarvoisen funktion $f(x, y)$ muutosnopeutta pisteessä (a, b) . Yhden muuttujan tapauksessa muutosnopeutta voidaan tutkia vain ainoan muuttujan x suunnassa, kahden ja useamman muuttujan tapauksessa tutkittavia suuntia on sen sijaan äärettömän monta. Aloitetaan tutkimalla muutosnopeuksia x -ja y -akselien suuntaisesti siirryttäessä.

Määritelmä 1.39. Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta (*partial derivative*) muuttujan x suhteen pisteessä (a, b) on

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

ja osittaisderivaatta muuttujan y suhteen pisteessä (a, b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

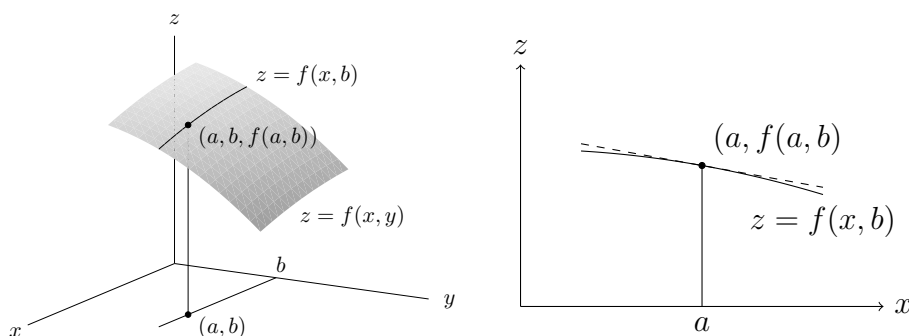
(mikäli ko. raja-arvo on olemassa).

∂ luetaan ”doo” ja esimerkiksi $\frac{\partial f}{\partial x}$ ”doo f doo x”. Muita kirjoissa tyypillisesti käytettäviä merkintöjä osittaisderivaatoille:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = f_1(x, y) = D_x f(x, y) = D_1 f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = f_2(x, y) = D_y f(x, y) = D_2 f(x, y)$$

Geometrisesti $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ilmaisee pinnan $z = f(x, y)$ ja tason $y = b$ leikkauskäyrän $z = f(x, b)$ tangentsuoran kulmakertoimen pisteessä $(a, b, f(a, b))$.



Vastaavasti $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ on käyrän $z = f(a, y)$ tangenttisuoran kulmakerroin. $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ on siis funktion f hetkellinen muutosnopeus x -suunnassa ja $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ on hetkellinen muutosnopeus y -suunnassa pisteessä (a, b) .

Huomautus 1.40. Jos merkitään $g(x) = f(x, b)$, niin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)$$

(ja vastaavalla tavoin y :n suhteen). Osittaisderivointi palautuu siten yhden muuttujan funktion derivoinniksi, jossa derivoidaan halutun muuttujan suhteen ja pidetään toista muuttujaa vakiona.

Esimerkki 1.41. Olkoon $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^3$. f :n osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y^2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy - 3y^2$$

ja siten esimerkiksi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 4 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = -7.$$

Oletetaan, että $f(x, y)$ ilmaisee lämpötilan ($^{\circ}\text{C}$) pisteessä (x, y) (m). Lämpötilan hetkellinen muutosnopeus siirryttäessä pisteestä $(1, -1)$

itään: $4 \text{ }^{\circ}\text{C/m}$

länteen: $-4 \text{ }^{\circ}\text{C/m}$

pohjoiseen: $-7 \text{ }^{\circ}\text{C/m}$

etelään: $7 \text{ }^{\circ}\text{C/m}$

Usein merkitään lyhyesti $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Esimerkki 1.42. Laske $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$, kun $f(x, y) = e^{xy} \sin x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x(e^{xy}) \sin x + e^{xy} D_x(\sin x) = ye^{xy} \sin x + e^{xy} \cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \sin x$$

1.4.2 Tangenttitaso

Derivoituvan reaalifunktion f kuvaajan $y = f(x)$ pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö on

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (1.43)$$

Tarkastellaan kahden muuttujan funktion f kuvaajaa $z = f(x, y)$. x - ja y -suunnissa käyrien $z = f(x, b)$ ja $z = f(a, y)$ pisteeseen $\mathbf{p} = (a, b, f(a, b))$ piirrettyjen tangenttisuorien yhtälöt ovat (1.43):n nojalla

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \quad \text{ja}$$

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

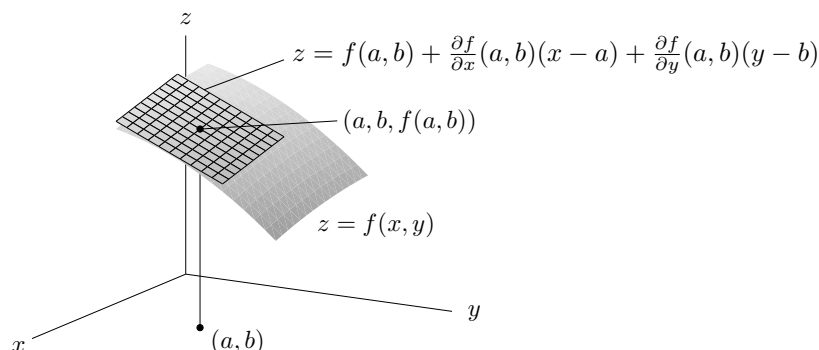
Koska pisteen \mathbf{p} kautta kulkevan (ei-pystysuoran) tason yhtälö on muotoa

$$z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b),$$

niin em. tangenttisuorat sisältävän (eli tangenttisuorien virittämän) tason yhtälö on

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b). \quad (1.44)$$

Jos pinta on ”riittävän siisti” (tämä määritellään tarkemmin luvussa 1.6) pisteen \mathbf{p} ympäristössä, niin tätä tasoa kutsutaan pinnan $z = f(x, y)$ *tangenttitasoksi* (*tangent plane*) pisteessä \mathbf{p} .



Annetaan yhtälölle (1.44) myös seuraava geometrisempi perustelu. Em. käyrillä on pisteessä \mathbf{p} tangenttivektorit

$$\mathbf{u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right),$$

joten tangenttitason normaalivektoriksi saadaan

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1\right).$$

Niinpä tangenttitason normaalimuotoinen yhtälö $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$ tulee muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (x, y, z) &= \mathbf{n} \cdot (a, b, f(a, b)) \\ \Leftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)x - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)y + z &= -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)a - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)b + f(a, b), \end{aligned}$$

josta (1.44) seuraa.

Esimerkki 1.45. Laske pinnan $z = \frac{x-y}{x+y}$ pisteeseen $(1, 2, -1/3)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

Ratkaisu. Pinta on funktion $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ kuvaaja.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} & \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \frac{4}{9} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{(-1) \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} & \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Koska $f(1, 2) = -1/3$, niin tangenttitason yhtälöksi saadaan

$$z = -\frac{1}{3} + \frac{4}{9}(x-1) - \frac{2}{9}(y-2) \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 2y - 9z = 5.$$

1.4.3 Kolmen ja useamman muuttujan funktiot

Yleistetään osittaisderivaatan määritelmä myös kolmen ja useamman muuttujan funktioille.

Määritelmä 1.46. Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \end{aligned}$$

(mikäli raja-arvo on olemassa).

Tässä \mathbf{e}_i on i :s standardikantavektori, jonka i :s komponentti on 1 ja muut komponentit ovat nollia.

Jos f :n määrittelyjoukko on vain osajoukko $D \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x} \in D$, niin voi olla, että piste $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$ ei ole joukossa D eikä f :n arvoa tässä pisteessä voida laskea.

Määritelmä 1.47. Piste $\mathbf{x} \in D$ on joukon $D \subset \mathbb{R}^n$ sisäpiste (*interior point*), jos $B(\mathbf{x}, r) \subset D$ jollakin $r > 0$.

Jatkossa osittaisderivaatoista puhuttaessa oletamme, että \mathbf{x} on määrittelyjoukon D sisäpiste, jolloin määritelmän erotusosamäärät ovat aina määriteltyjä pienillä h .

Useamman muuttujan funktion osittaisderivaatat lasketaan samaan tapaan kuin kahden muuttujan funktion osittaisderivaatat.

Esimerkki 1.48. a) Funktion $f(x, y, z) = \ln(1 + xe^{yz})$ osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{yz}}{1 + xe^{yz}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xze^{yz}}{1 + xe^{yz}} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xye^{yz}}{1 + xe^{yz}}.$$

b) Funktion $z = u^2v^3w^4$ osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^3w^4, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 3u^2v^2w^4 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial w} = 4u^2v^3w^3.$$

1.4.4 Korkeammat osittaisderivaatat

Tarkastellaan seuraavassa osittaisderivaattaa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ muuttujan \mathbf{x} funktiona. Tätä funktiota voidaan edelleen osittaisderivoida.

Määritelmä 1.49. Olkoon funktiolla $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pisteen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Funktioiden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ osittaisderivaattoja (mikäli ne ovat olemassa) sanotaan f :n toisen kertaluvun osittaisderivaatoiksi (*second order partial derivatives*) ja merkitään

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\mathbf{x}).$$

Muita merkintöjä:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j} = f_{ij} = D_j D_i f.$$

Merkinnässä $f_{x_i x_j}$ (osittaisderivointi ensin x_i :n suhteen, sitten x_j :n suhteen) alaindeksijä luetaan siis vasemmalta oikealle. Merkinnässä $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ajatellaan, että operaattori $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ operoi f :ään ensin osittaisderivoimalla x_i :n suhteen, sitten x_j :n suhteen. Tapauksessa $i = j$ voidaan merkitä

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Vastaavalla tavoin voidaan tarkastella kolmannen kertaluvun osittaisderivaattoja

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$$

ja yleisesti m :n kerralluvun osittaisderivaattoja.

Huomautus 1.50. Kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Kolmen muuttujan funktiolla $f(x, y, z)$ on yhteensä yhdeksän toisen kertaluvun osittaisderivaattaa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$$

Esimerkki 1.51. Laske funktion $f(x, y) = x^2 + xy^2$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Ratkaisu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy,$$

joten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x + y^2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y^2) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x$$

Seuraavan lauseen mukaan tietyissä tapauksissa osittaisderivaatat $f_{x_i x_j}$ ja $f_{x_j x_i}$ ovat yhtäsuuret, jolloin riittää laskea vain toinen.

Lause 1.52 (Osittaisderivoinnin vaihtosääntö). *Oletetaan, että funktiolla f on osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ jossakin pisteen \mathbf{x} ympäristössä. Oletetaan lisäksi, että osittaisderivaatta $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ on jatkuva pisteen \mathbf{x} ympäristössä. Silloin myös osittaisderivaatta $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ on olemassa ja*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Todistus. Ks. [3, Thm 8.13]. □

Jos kolmen muuttujan funktion $f(x, y, z)$ toisen kertaluvun yhdeksän osittaisderivaattaa (ks. huomautus 1.50) ovat jatkuvia, niin vaihtosäännön mukaan erisuuria niistä ovat (korkeintaan) vain

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

Esimerkki 1.53. Laske kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat

$$f_{zxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}, \quad f_{xzx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x} \quad \text{ja} \quad f_{xxz} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}$$

funktiolle $f(x, y, z) = e^{2x-yz}$.

Ratkaisu. Lasketaan f_{zxx} :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-ye^{2x-yz}) = \frac{\partial}{\partial x} (-2ye^{2x-yz}) = -4ye^{2x-yz}.$$

Koska tämä on jatkuva funktio, niin vaihtosäännön mukaan $f_{zxx} = f_{xzx} = f_{xxz} = -4ye^{2x-yz}$.

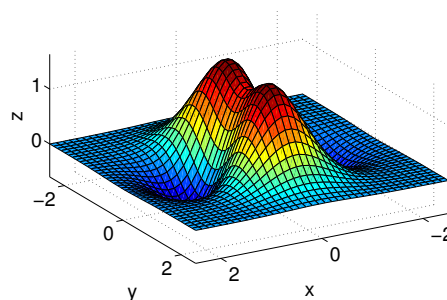
1.5 Lokaalit ja globaalit ääriarvot

Määritelmä 1.54. Funktiolla $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on joukossa $D \subset \mathbb{R}^n$ pisteessä $\mathbf{a} \in D$

- *(globaali) maksimi (maximum)*, jos $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ kaikilla $\mathbf{x} \in D$,
- *(globaali) minimi (minimum)*, jos $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ kaikilla $\mathbf{x} \in D$,
- *lokaali maksimi*, jos $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ jossakin \mathbf{a} :n ympäristössä $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r) \cap D$, ja
- *lokaali minimi*, jos $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ jossakin \mathbf{a} :n ympäristössä $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r) \cap D$.

Pistettä \mathbf{a} kutsutaan *ääriarvopisteeksi* (*minimipisteeksi* tai *maksimipisteeksi*) ja arvoa $f(\mathbf{a})$ *ääriarvoksi* (*minimiarvoksi* tai *maksimiarvoksi*). Funktion f globaalia maksimiarvoa joukossa D merkitään $\max_D f$ ja minimiarvoa $\min_D f$.

Esimerkki 1.55. Funktiolla $f(x, y) = (\frac{1}{2} - x^2 + y^2) \exp(1 - x^2 - y^2)$ on kaksi lokaalia minimiä ja kaksi lokaalia maksimia.



1.5.1 Avoimet ja suljetut joukot

Määritelmä 1.56. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$.

- Piste $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ on joukon A *reunapiste* (*boundary point*), jos jokaisessa \mathbf{a} :n ympäristössä on sekä A :n että A :n komplementin pisteitä, ts. $A \cap B(\mathbf{a}, r) \neq \emptyset$ ja $A^c \cap B(\mathbf{a}, r) \neq \emptyset$ jokaisella $r > 0$.
- Joukon A reunapisteiden muodostamaa joukkoa kutsutaan A :n *reunaksi* (*boundary*) ja merkitään ∂A .
- Joukon A sisäpisteiden (ks. määritelmä 1.47) muodostamaa joukkoa kutsutaan A :n *sisukseksi* (*interior*) ja merkitään $\text{int}(A)$.
- Joukkoa $\bar{A} = A \cup \partial A$ kutsutaan A :n *sulkeumaksi* (*closure*).
- Joukko A on *suljettu* (*closed*), jos A sisältää kaikki reunapisteensä.
- Joukko A on *avoin* (*open*), jos A ei sisällä yhtään reunapistettään.

Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee:

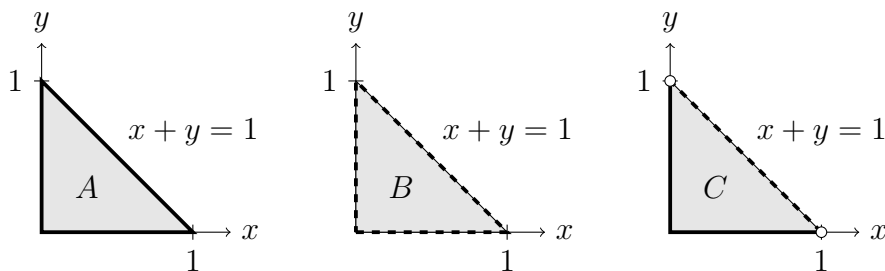
- $\text{int}(A) \subset A \subset \bar{A}$,
- joukko A on avoin jos ja vain jos $A = \text{int}(A)$ ja
- joukko A on suljettu jos ja vain jos $A = \bar{A}$.

Tämän opintojakson esimerkeissä tasojoukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on enimmäkseen ”siisti” joukko, jonka reuna koostuu äärellisen monesta sileästä käyrästä. Tällöin joukko on suljettu, jos kaikki reunakäyrät kuuluvat joukkoon ja avoin, jos yksikään reunakäyrien piste ei kuulu joukkoon. Muissa tapauksissa joukko ei ole avoin eikä suljettu.

Esimerkki 1.57. a) Joukko $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ on suljettu.

b) Joukko $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ on avoin.

c) Joukko $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$ ei ole avoin eikä suljettu.

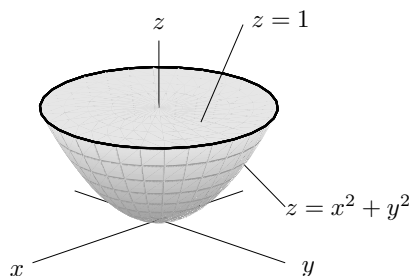


Vastaavasti jos avaruusjoukon $A \subset \mathbb{R}^3$ reuna koostuu äärellisen monesta sileästä pinnasta (määritellään tarkemmin opintojaksolla Vektorianalyysi), niin joukko on suljettu, jos se sisältää kaikki reunapintansa.

Esimerkki 1.58. a) Joukko $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ on suljettu.

b) Joukko $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$ on avoin.

c) Joukko $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$ ei ole avoin eikä suljettu.



Joukon reuna ei välttämättä ole ”ohut”.

Esimerkki 1.59. Joukon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0, 1]\}$ reuna on koko yksikköneliö $[0, 1] \times [0, 1]$ eikä joukolla A ole yhtään sisäpistettä.

1.5.2 Ääriarvojen hakeminen suljetussa ja rajoitetussa joukossa

Määritelmä 1.60. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu (bounded), jos $A \subset B(\mathbf{0}, R)$ jollakin (suurella) $R > 0$. Muutoin joukko A on rajoittamaton.

Suljetulle ja rajoitetulle joukolle $A \neq \emptyset$ voidaan määritellä halkaisija

$$\text{diam}(A) = \max\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}.$$

Rajoittamattomalle joukolle asetetaan $\text{diam}(A) = \infty$. Ei-suljetuille joukoille tätä maksimia ei välttämättä ole olemassa, mutta halkaisija voidaan niillekin määritellä *supremumin* avulla vastaavasti. Tällöin joukko A on rajoitettu, jos $\text{diam}(A) < \infty$. Käsitettä rajoitettu joukko ei tule sekoittaa käsitteeseen äärellinen joukko. Joukko on äärellinen, jos siinä on äärellisen monta alkia.

Seuraava lause antaa riittävän ehdon ääriarvojen olemassaololle.

Lause 1.61 (Ääriarvojen olemassaolo). Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ suljettu ja rajoitettu joukko sekä $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin f saavuttaa D :ssä sekä pienimmän että suurimman arvonsa, ts. on olemassa \mathbf{a} ja $\mathbf{b} \in D$ siten, että $f(\mathbf{a}) = \min_D f$ ja $f(\mathbf{b}) = \max_D f$.

Todistus. Sivuutetaan. Väitteen todistamiseksi tarvittaisiin \mathbb{R}^n :n suljettujen ja rajoitettujen joukkojen (eli *kompaktien joukkojen*) syvällisempää analysointia, ks. esimerkiksi [4, Thm 4.28]. Seuraava esimerkki osoittaa, miksi kaikki oletukset (joukko on suljettu, joukko on rajoitettu ja funktio on jatkuva) ovat tarpeen. Vertaa vastaavaan lauseeseen reaalifunktioille [11, lause 5.42]. \square

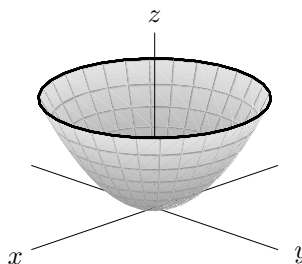
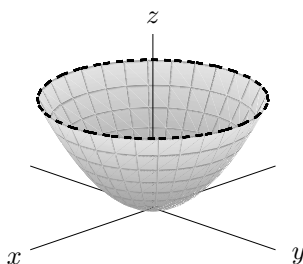
Esimerkki 1.62. a) $f: B(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Funktio on jatkuva ja joukko on rajoitettu, mutta joukko ei ole suljettu. f :llä on minimi $f(0, 0) = 0$, mutta ei maksimia (vasemmanpuoleinen kuva).

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Funktio on jatkuva ja joukko on suljettu, mutta joukko ei ole rajoitettu. f :llä on minimi $f(0, 0) = 0$, mutta ei maksimia.

c) $f: \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Funktio on jatkuva ja joukko on sekä suljettu että rajoitettu. f :llä on minimi $f(0, 0) = 0$ ja maksimi 1 reunaympyrällä $\partial B(\mathbf{0}, 1)$ (oikeanpuoleinen kuva).

d) $f: \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0), \\ 2, & \text{kun } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Joukko on suljettu ja rajoitettu, mutta funktio ei ole jatkuva. f :llä on maksimi $f(0, 0) = 2$, mutta ei minimiä (vertaa oikeanpuoleiseen kuvaan).



Lause 1.63 (Välttämätön ehto lokaalille ääriarvolle). *Jos funktiolla $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on lokaali ääriarvopiste \mathbf{a} ja f :llä on kaikki osittaisderivaatat pisteessä \mathbf{a} , niin kaikki f :n osittaisderivaatat ovat nollia \mathbf{a} :ssa eli*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$.

Todistus. Todistetaan väite funktiolle $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($n:n$ muuttujan tapaus vastaavasti). Oletetaan, että $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on funktion f lokaali maksimipiste ja että on olemassa $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

a) Jos olisi $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) > 0$, niin kaikilla pienillä $h > 0$ olisi

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} > 0 \Leftrightarrow f(a+h, b) > f(a, b).$$

Tämä on ristiriita sen kanssa, että (a, b) on lokaali maksimipiste. On siis oltava $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \leq 0$.

b) Jos taas olisi $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) < 0$, niin kaikilla itseisarvoltaan pienillä $h < 0$ olisi

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} < 0 \Leftrightarrow f(a+h, b) > f(a, b).$$

Tämä on ristiriita sen kanssa, että (a, b) on lokaali maksimipiste. On siis oltava $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \geq 0$.

Kohtien **a** ja **b** nojalla on oltava $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$.

Minimipisteen tapaus vastaavasti. □

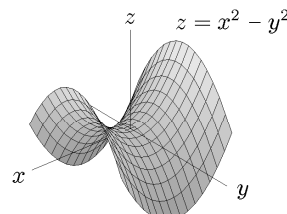
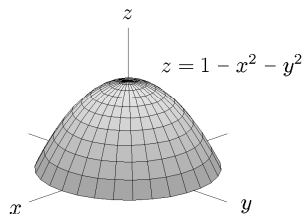
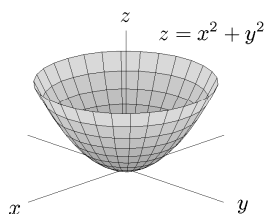
Tapauksessa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lauseen 1.63 väite tarkoittaa geometrisesti sitä, että ääriarvopisteessä kuvaajan $z = f(x, y)$ tangenttitaso on vaakasuorassa. Piste, jossa kaikki osittaisderivaatat ovat nolliä, ei kuitenkaan välttämättä ole ääriarvopiste. Pistettä, jossa osittaisderivaatat ovat nolliä, mutta joka ei kuitenkaan ole lokaali ääriarvopiste, kutsutaan *satulapisteeksi (saddle point)*.

Esimerkki 1.64. Seuraavien funktioiden osittaisderivaatat ovat nolliä pisteessä $(0, 0)$:

a) Funktiolla $f(x, y) = x^2 + y^2$ on lokaali minimi pisteessä $(0, 0)$.

b) Funktiolla $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ on lokaali maksimi pisteessä $(0, 0)$.

c) Funktiolle $f(x, y) = x^2 - y^2$ on piste $(0, 0)$ on satulapiste.



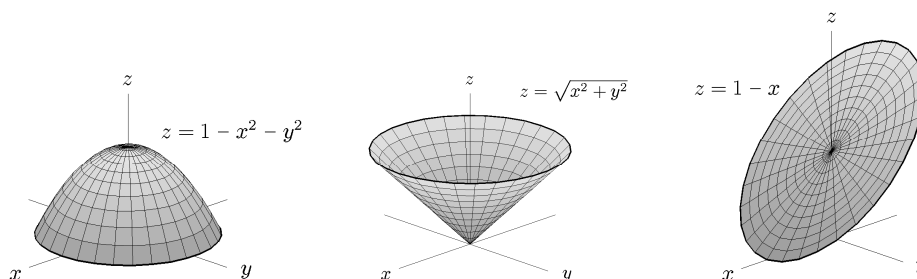
Yhdistetään lauseet 1.61 ja 1.63 seuraavaksi ääriarvojen etsintäohjeeksi:

Lause 1.65 (Globaalien ääriarvojen etsintäohje). Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ suljettu ja rajoitettu joukko sekä $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. f saavuttaa tällöin sekä suurimman että pienimmän arvonsa joukossa D . Jos $f(\mathbf{a})$ on f :n globaali minimi tai maksimi, niin \mathbf{a} on

- (1) D :n sisäpiste, jossa f :n kaikki osittaisderivaatat häviävät,
- (2) D :n sisäpiste, jossa f :llä ei ole kaikkia osittaisderivaattoja, tai
- (3) D :n reunapiste.

Tapauksissa (1) ja (2) pistettä \mathbf{a} kutsutaan *kriittiseksi pisteeksi* (*critical point*). Ääriarvoja määritettäessä haetaan yleensä ensin kriittiset pisteet eli tyypin (1) ja (2) pisteet, joita on tyypillisesti vain muutama (tyypin (2) pisteitä ei ollenkaan, jos f :llä on kaikki osittaisderivaatat jokaisessa sisäpisteessä). Reunapisteet tarkastellaan erikseen esimerkiksi parametrisoimalla reunaikäyrä. Saadaan joukko ääriarvokandidaatteja, joista poimitaan pienin ja suurin.

Esimerkki 1.66. Tarkastellaan menetelmää ensin kolmen yksinkertaisen esimerkin avulla. Haetaan kussakin kohdassa funktion $f(x, y)$ suurin ja pienin arvo kiekossa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.



a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

Kriittiset pisteet.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ainoa ratkaisu on $x = 0$ ja $y = 0$, ts. piste $(x, y) = (0, 0)$. Funktion arvo kyseisessä pisteessä on $f(0, 0) = 1$.

Reuna. Reunalla $x^2 + y^2 = 1$, joten siellä funktion arvo on $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2) = 0$.

Vastaus. $\max_D f = f(0, 0) = 1$ ja $\min_D f = 0$, joka saavutetaan kaikissa

reunan $x^2 + y^2 = 1$ pisteissä.

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Kriittiset pisteet.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Osittaisderivaatoilla ei ole yhteisiä nollakohtia, mutta origossa osittaisderivaattoja ei ole, joten $(x, y) = (0, 0)$ on kriittinen piste. Funktion arvo kyseisessä pisteessä on $f(0, 0) = 0$.

Reuna. Reunalla $x^2 + y^2 = 1$, joten siellä funktion arvo on $f(x, y) = 1$.

Vastaus. $\max_D f = 1$, joka saavutetaan kaikissa reunan $x^2 + y^2 = 1$ pisteissä ja $\min_D f = f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = 1 - x$.

Kriittiset pisteet.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

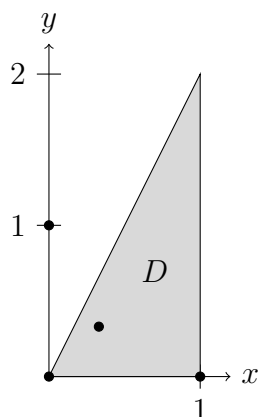
Osittaisderivaatat on olemassa kaikkilla (x, y) , mutta niillä ei ole yhteisiä nollakohtia. Kriittisiä pisteitä ei ole, joten suurin ja pienin arvo saavutetaan reunalla.

Reuna. Reunalla $x^2 + y^2 = 1$ x :n pienin arvo on -1 ja suurin arvo 1 . Molemmissa tapauksissa $y = 0$.

Vastaus. $\max_D f = f(-1, 0) = 2$ ja $\min_D f = f(1, 0) = 0$.

Huomautus 1.67. Esimerkin 1.66 **b**-kohdassa se, että osittaisderivaatalla ei ole raja-arvoa origossa, ei vielä välttämättä takaa, etteikö f :llä voisi olla osittaisderivaattaa origossa (ks. [11, huomautus 5.61 **b**]). Käytännössä kuitenkin ääriarvot tehtävissä tarkastetaan kaikki pisteet, joissa jollakin osittaisderivaatalla ei ole raja-arvoa, sillä menetelmän ideana on vain rajata tarkastettavien pisteiden joukko niin pieneksi, että pisteiden läpikäynti on mahdollista.

Esimerkki 1.68. Hae funktion $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ suurin ja pienin arvo kolmiojoukossa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x, 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$.



Kriittiset pisteet. $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$, joten

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (y = 0 \text{ tai } 1 - 2x - y = 0) \text{ ja } (x = 0 \text{ tai } 1 - x - 2y = 0).$$

Kriittisiksi pisteiksi saadaan $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1/3, 1/3)$. Näistä kaksi ensimmäistä pistettä ovat joukon D reunalla ja kolmas ei kuulu joukkoon D (ks. kuva). Vain viimeinen piste on joukon D sisäpiste ja $f(1/3, 1/3) = 1/27 \approx 0,0370$.

Reuna. Reuna koostuu kolmesta janasta.

$y = 0$ $f(x, 0) = 0$, eli $f = 0$ tällä reunajanalla.

$x = 1$ $f(1, y) = -y^2 =: g(y)$. $g(y)$ on vähenevä funktio joukossa $0 \leq y \leq 2$, joten f :n suurin arvo tällä reunajanalla on $f(1, 0) = 0$ ja pienin $f(1, 2) = -4$.

$y = 2x$ $f(x, 2x) = -6x^3 + 2x^2 =: h(x)$. Haetaan $h(x)$:n ääriarvot joukossa $0 \leq x \leq 1$. $h'(x) = -18x^2 + 4x = 2x(-9x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2/9$. Tältä janalta ääriarvokandidaateiksi saadaan h :n derivaatan nollakohdista ja välin päätepisteistä $f(0, 0) = 0$, $f(2/9, 4/9) = 8/243 \approx 0,0329$ ja $f(1, 2) = -4$.

Vastaus. $\max_D f = f(1/3, 1/3) = 1/27$ ja $\min_D f = f(1, 2) = -4$.

Huomautus 1.69. Toisin kuin lineaarisen funktion optimoinnissa, ei-lineaarisen funktion ääriarvojen löytämiseksi **ei riitä laskea f :n arvot pelkästään joukon ”kulmapisteissä”**.

Esimerkki 1.70. Hae funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ suurin ja pienin arvo kiekossa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Kriittiset pisteet.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y = 0 \end{cases}$$

Ainoa kriittinen piste on $(x, y) = (1/2, 0) \in D$ ja $f(1/2, 0) = -1/4$.

Reuna, tapa 1. Parametrisoidaan reuna: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Nyt $x = \cos t$ ja $y = \sin t$, joten

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2 \sin^2 t - \cos t =: g(t).$$

On haettava $g(t)$:n ääriarvot välillä $0 \leq t \leq 2\pi$. Selvitetään derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2 \cos t \sin t + 4 \sin t \cos t + \sin t = \sin t(2 \cos t + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \sin t &= 0 \text{ tai } \cos t = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow t &= 0, \pi, 2\pi, \frac{2\pi}{3} \text{ tai } \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Funktion arvot: $g(0) = 0$, $g(\pi) = 2$, $g(2\pi) = 0$, $g(2\pi/3) = 9/4$ ja $g(4\pi/3) = 9/4$ (välin päätepisteet sisältyvät näihin).

Reuna, tapa 2. Reunalla on $y^2 = 1 - x^2$, joten $f(x, y) = -x^2 - x + 2 =: h(x)$.

On haettava $h(x)$:n ääriarvot välillä $-1 \leq x \leq 1$. Selvitetään derivaatan nollakohdat: $h'(x) = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$. Arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa: $h(-1) = 2$, $h(-1/2) = 9/4$ ja $h(1) = 0$.

Vastaus. $\max_D f = f(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = 9/4$ ja $\min_D f = f(1/2, 0) = -1/4$.

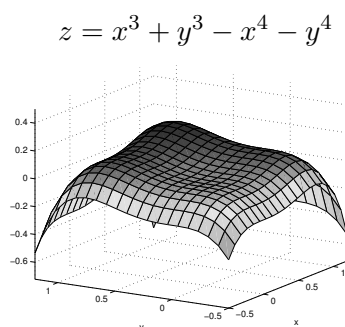
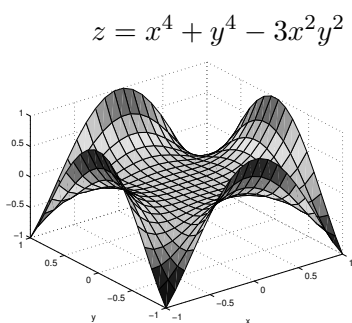
1.5.3 Ääriarvot joukossa, joka ei ole suljettu ja rajoitettu

Jos tarkastelujoukko D ei ole suljettu ja rajoitettu, niin tarkastelu hieman mutkistuu. Voidaan koettaa esimerkiksi seuraavankaltaisia keinoja.

- Jos jollakin tarkastelujoukon D käyrällä $f \rightarrow \infty$, niin voidaan päätellä, että f ei saavuta suurinta arvoaan joukossa D .
- Jos jossakin suljetussa ja rajoitetussa osajoukossa $R \subset D$ f saavuttaa maksiminsa M ja osoitetaan, että R :n ulkopuolella $f \leq M$, niin voidaan päätellä, että f saavuttaa D :ssä suurimman arvonsa M .

Esimerkki 1.71. Onko funktiolla $f(x, y) = x^4 + y^4 - 3x^2y^2$ suurinta tai pienintä arvoa joukossa $D = \mathbb{R}^2$?

Ratkaisu. x -akselilla ($y = 0$) on $f = f(x, 0) = x^4 \rightarrow \infty$, kun $x \rightarrow \infty$, joten f :llä ei ole maksimia. Toisaalta suoralla $y = x$ on $f = f(x, x) = -x^4 \rightarrow -\infty$, kun $x \rightarrow \infty$, joten f :llä ei ole myöskään minimiä.



Esimerkki 1.72. Onko funktiolla $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^4 - y^4$ suurinta tai pienintä arvoa joukossa $D = \mathbb{R}^2$?

Ratkaisu. Kirjoitetaan $f(x, y) = (x^3 - x^4) + (y^3 - y^4)$. Tässä $x^3 - x^4 \rightarrow -\infty$, kun $x \rightarrow \pm\infty$ ja $y^3 - y^4 \rightarrow -\infty$, kun $y \rightarrow \pm\infty$. Niinpä pienintä arvoa ei ole ja toisaalta on olemassa $M > 0$ siten, että $x^3 - x^4 \leq 0$, kun $|x| \geq M$ ja $y^3 - y^4 \leq 0$, kun $|y| \geq M$. Siten $f(x, y) \leq 0$ neliön

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -M \leq x \leq M, -M \leq y \leq M\}$$

ulkupuolella. f :n suurin arvo neliössä (ja siten koko \mathbb{R}^2 :ssa) löytyy kriittisestä pisteestä:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3 - 4x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 4y^3 = y^2(3 - 4y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0), (0, 3/4), (3/4, 0) \text{ tai } (3/4, 3/4).$$

$f(0, 0) = 0$, $f(0, 3/4) = f(3/4, 0) = 27/256$ ja $f(3/4, 3/4) = 27/128$.

Vastaus. Pienintä arvoa ei ole, suurin arvo on $f(3/4, 3/4) = 27/128$.

Esimerkki 1.73. Ylhäältä avoimen suorakulmisen särmiön muotoisen laatikon tilavuus on V . Miten laatikon mitat on valittava, jotta viiden sivun yhteenlaskettu pinta-ala olisi mahdollisimman pieni?

Ratkaisu. Merkitään laatikon pituutta x :llä, leveyttä y :llä ja korkeutta z :lla, jolloin pinta-ala on $A = xy + 2xz + 2yz$. Tilavuus on $V = xyz$, josta voidaan

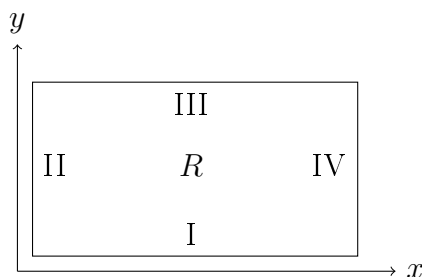
ratkaista $z = V/(xy)$. Sijoittamalla tämä pinta-alan lausekkeeseen saadaan minimoitavaksi kahden muuttujan funktio

$$A(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

joukossa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 2V \\ xy^2 = 2V \end{cases} \Rightarrow x^2 y = xy^2 \stackrel{x, y > 0}{\Leftrightarrow} x = y$$

Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $x = y = (2V)^{1/3}$ (jolloin $A(x, y) = 3(2V)^{2/3} =: A_0$ ja $z = V/(xy) = 2^{-2/3}V^{1/3} = x/2$). Tämän ainoan kriittisen pisteen täytyy olla minimipiste, sillä $A(x, y) \rightarrow \infty$, kun (x, y) lähestyy koordinaattiakselia tai kun $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Tarkemmin: valitaan suorakulmio R oheisen kuvan mukaisesti siten, että sivun I suuntaisen suoran alapuolella $2V/y > A_0$, sivun II suuntaisen suoran vasemmalla puolella $2V/x > A_0$ ja muualla D :ssä R :n ulkopuolella $xy > A_0$. Silloin suorakulmion R ulkopuolella $A(x, y) > A_0$ ja suljetussa ja rajoitetussa joukossa R saavutettava jatkuvan funktion $A(x, y)$ minimi on $A(x, y)$:n minimi koko joukossa D .



Vastaus. Laatikon leveydeksi ja pituudeksi on valittava $(2V)^{1/3}$ ja korkeudeksi $(2V)^{1/3}/2$.

1.6 Lineaarinen approksimointi ja differentioituvuus

1.6.1 Kahden muuttujan funktiot

Jos reaalfunktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä a , niin

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \epsilon(h)h, \quad (1.74)$$

missä $\epsilon(h)$ on funktio, jolle $\epsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Niinpä f :lle saadaan lineaarisen funktion $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(h) = f'(a)h$ avulla *lineaarinen approksimaatio* pisteen a suhteen:

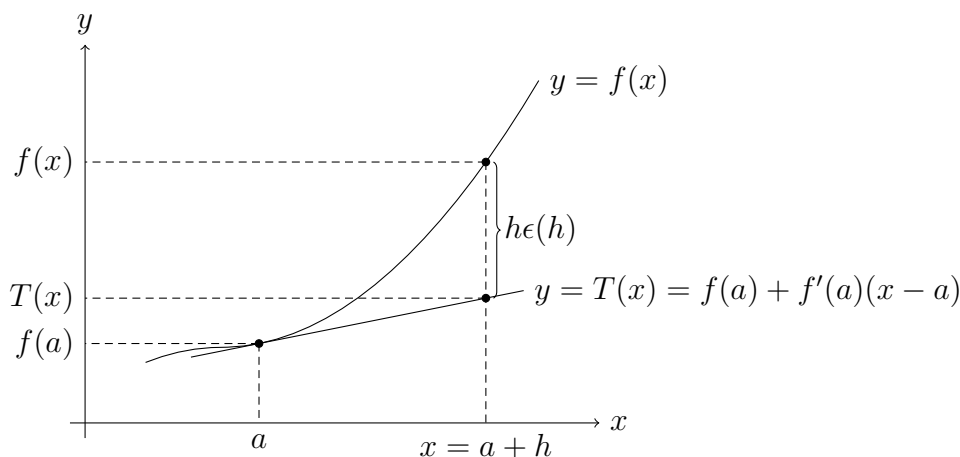
$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + L(h), \quad (1.75)$$

mikä voidaan merkitsemällä $x = a+h$ kirjoittaa muotoon $f(x) \approx T(x)$, missä

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

on funktion f *linearisointi* pisteen a suhteen. Approksimaatiossa tehty virhe on $\epsilon(h)h$. Virheen suuruuden suhde etäisyyteen a :sta on $\epsilon(h)h/h = \epsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Lähellä a :ta tehty virhe on siis mitätön suhteessa etäisyyteen a :sta ja f :n kuvaaja näyttää likimain *tangenttisuoraltaan*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



Osittaisderivaattojen avulla voidaan kahden muuttujan funktiolle $f(x, y)$ kirjoittaa nyt arviota (1.74) vastaavat arviot pisteen (a, b) suhteen x - ja y -suunnissa (merkitään $x = a+h$ ja $y = b+k$):

$$f(a+h, b) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \epsilon_1(h)h,$$

$$f(a, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \epsilon_2(k)k,$$

missä $\epsilon_1(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$ ja $\epsilon_2(k) \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow 0$. Pelkkä osittaisderivaattojen olemassaolo sitoo funktion käyttäytymistä kuitenkin vain koordinaattiakselien suunnissa, muissa suunnissa funktio voi käyttäytyä miten tahansa. Erityisesti osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa edes funktion

jatkuvuutta toisin kuin reaalifunktion derivoituvuus. Esimerkiksi tästä käy funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } xy = 0, \\ 1 & \text{muulloin} \end{cases}$$

(ts. $f = 0$ koordinaattiakseleilla ja 1 muualla) käyttäytyminen origossa. Arvion (1.75) vastine kahden muuttujan funktiolle $f(x, y)$ on

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + L(h, k),$$

missä L on x - ja y -suuntaisten tangenttisuorien määräämä lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k.$$

Määritelmä 1.76. Funktio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on *differentioituva* (*differentiable*) *pisteessä* (a, b) , jos f :llä on ko. pisteessä molemmat osittaisderivaatat ja jos

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \epsilon(h, k)\|(h, k)\|, \quad (1.77)$$

missä $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Edelleen f on *differentioituva*, jos se on differentioituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Vaaditaan siis, että lähellä pistettä (a, b) funktio käyttäytyy kuten osittaisderivaattojen määräämien tangenttisuorien virittämä tangenttitaso

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) =: T(x, y)$$

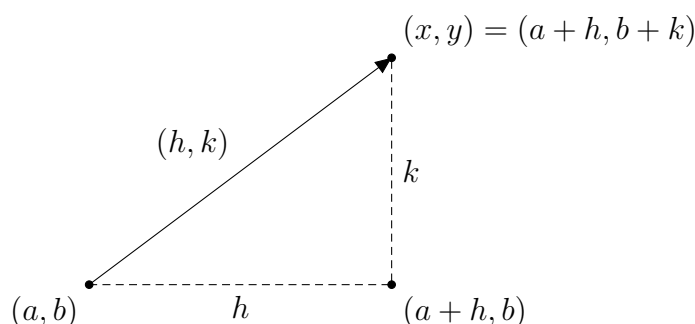
(ks. luku 1.4.2). Arviota

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \quad (1.78)$$

eli $f(x, y) \approx T(x, y)$ kutsutaan funktion f *tangenttitasoarvioksi* tai *lineaariseksi arvioksi* (*linear approximation*) ja funktiota $T(x, y)$ f :n *linearisoinniksi* pisteen (a, b) suhteen. Arviossa tehdyn virheen $\epsilon(h, k)\|(h, k)\|$ suhde etäisyyteen pisteestä (a, b) on

$$\frac{\epsilon(h, k)\|(h, k)\|}{\|(h, k)\|} = \epsilon(h, k) \rightarrow 0$$

kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Pisteitä (a, b) ja (x, y) sekä siirtymävektoria (h, k) havainnollistetaan seuraavassa kuvassa:



Esimerkki 1.79. Osoita, että funktio $f(x, y) = x^3 + xy - y$ on differentioituva jokaisessa pisteessä $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Ratkaisu. Lasketaan ensin osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 1.$$

Ratkaistaan nyt määritelmän 1.76 funktio $\epsilon(h, k)$ ja osoitetaan, että se on oikeaa muotoa:

$$\begin{aligned} & f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \\ &= (a + h)^3 + (a + h)(b + k) - (b + k) - (a^3 + ab - b) \\ &\quad - (3a^2 + b)h - (a - 1)k \\ &= 3ah^2 + h^3 + hk, \end{aligned}$$

joten määritelmän 1.76 ϵ -funktio on $\epsilon(h, k) = (3ah^2 + h^3 + hk)/\sqrt{h^2 + k^2}$. On osoitettava, että $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Näin on, sillä

$$\begin{aligned} 0 \leq |\epsilon(h, k)| &\leq 3|a||h|\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + h^2\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |k|\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq 3|a||h| + h^2 + |k| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Esimerkki 1.80. Arvioi funktion $f(x, y) = xe^{y+x^2}$ arvoa pisteessä $(x, y) = (2, 05, -3,92)$ sopivalla lineaarisella approksimaatiolla.

Ratkaisu. Muodostetaan lineaarinen arvio (1.78) pisteen $(a, b) = (2, -4)$ suhteen, jolloin $h = x - a = 2,05 - 2 = 0,05$ ja $k = y - b = -3,92 - (-4) = 0,08$. Osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 + 2x^2)e^{y+x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{y+x^2},$$

joten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -4) = 9 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, -4) = 2.$$

Niinpä arvioksi saadaan

$$\begin{aligned} f(2,05, -3,92) &= f(2 + 0,05, -4 + 0,08) \\ &\approx f(2, -4) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, -4)0,05 + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -4)0,08 \\ &= 2 + 9 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,08 = 2,61. \end{aligned}$$

Laskimella oikeaksi nelidesimaaliseksi likiarvoksi nähdään $f(2,05, -3,92) \approx 2,7192$.

1.6.2 Derivaattamatriisi ja n :n muuttujan funktiot

Kahden muuttujan funktion differentioituvuuden määritelmässä 1.76 lauseke

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$$

voidaan esittää matriisitulona muodossa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 1.81. Olkoon funktiolla $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki osittaisderivaatat pisteessä \mathbf{x} . Matriisia

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

kutsutaan funktion f *derivaattamatriisiksi* (*derivative matrix*) pisteessä \mathbf{x} .

Merkitään $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{a} = (a, b)$ ja $\mathbf{h} = (h, k)$, jolloin $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$. Funktion $f(x, y)$ differentioituvuuden määritelmän yhtälö (1.77) tulee nyt sievään muotoon

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|,$$

missä \mathbf{h} tulkitaan pystyvektorina $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$. n :n muuttujan funktiolle merkitään $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n]^T$, jolloin

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a})\mathbf{h} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n. \end{aligned}$$

Differentioituvuuden määritelmä n :n muuttujan funktiolle on siten perusteltua asettaa seuraavasti:

Määritelmä 1.82. Funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on *differentioituva pisteessä* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, jos f :llä on pisteessä \mathbf{a} kaikki n osittaisderivaattaa ja jos

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|, \quad (1.83)$$

missä $\epsilon(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Edelleen f on *differentioituva*, jos se on differentioituva jokaisessa pisteessä.

Lineaarikuvausta $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\mathbf{h}) = f'(\mathbf{a})\mathbf{h}$ kutsutaan funktion *derivaa-taksi* pisteessä \mathbf{a} . Funktio $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ on f :n *linearisointi* pisteen \mathbf{a} suhteen ja arvio

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h}$$

eli $f(\mathbf{x}) \approx T(\mathbf{x})$ on funktion f *lineaarinen approksimaatio* pisteen \mathbf{a} suhteen.

Esimerkki 1.84. Kirjoitetaan kolmen muuttujan funktion $f(x, y, z)$ linearisointi $T(x, y, z)$ pisteen $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ suhteen. Merkitään pistettä $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ja erotusvektorin $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ komponentteja $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, jolloin $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ ja $z = z_0 + \Delta z$. Nyt

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}$$

eli

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= f(x_0, y_0, z_0) \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\ &= f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta z. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.85. Laske funktion $f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$ linearisointi pisteen $(2, 2, 1)$ suhteen ja arvioi sen avulla funktion arvoa pisteessä $(2,1, 1,8, 1,3)$.

Ratkaisu. Osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x + 2y + 3z}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2, 1) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x + 2y + 3z}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2, 1) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{2\sqrt{x + 2y + 3z}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(2, 2, 1) = \frac{1}{2}$$

Koska $f(2, 2, 1) = 3$, saadaan linearisoinniksi

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= 3 + \frac{1}{6}(x - 2) + \frac{1}{3}(y - 2) + \frac{1}{2}(z - 1) \\ &= \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ja siten kysytty arvio on

$$f(2,1, 1,8, 1,3) \approx T(2,1, 1,8, 1,3) = \frac{1}{6} \cdot 2,1 + \frac{1}{3} \cdot 1,8 + \frac{1}{2} \cdot 1,3 + \frac{3}{2} \approx 3,1.$$

Voitaisiin laskea myös suoraan erotuksia $\Delta x = 2,1 - 2 = 0,1$, $\Delta y = 1,8 - 2 = -0,2$ ja $\Delta z = 1,3 - 1 = 0,3$ käyttäen:

$$f(2,1, 1,8, 1,3) \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot 0,1 - \frac{1}{3} \cdot 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,3 = 3,1.$$

Monissa sovelluksissa linearisointia käytetään virheen arvioimiseen.

Esimerkki 1.86. Valmistetaan kuutio, jonka särmien pituuksiksi mitataan x_0 , y_0 ja z_0 (mm). Jos näiden mittojen virheet ovat Δx , Δy ja Δz (mm), niin oikeat mitat ovat

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta x, \\ y = y_0 + \Delta y, \\ z = z_0 + \Delta z. \end{cases}$$

Tilavuuden $V = V(x, y, z) = xyz$ virhettä eli oikean arvon $V(x, y, z)$ ja mitatun arvon $V(x_0, y_0, z_0)$ erotusta voidaan arvioida

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x, y, z) - V(x_0, y_0, z_0) \\ &\approx \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta z \\ &= y_0 z_0 \Delta x + x_0 z_0 \Delta y + x_0 y_0 \Delta z. \end{aligned}$$

a) Särmien pituuksiksi mitataan $x_0 = y_0 = z_0 = 100$ mm yhden millimetrin tarkkuudella. Arvioi tilavuuden V virhettä ΔV .

Ratkaisu. Nyt $|\Delta x| \leq 1$, $|\Delta y| \leq 1$ ja $|\Delta z| \leq 1$ ja

$$\Delta V \approx y_0 z_0 \Delta x + x_0 z_0 \Delta y + x_0 y_0 \Delta z = 10\,000(\Delta x + \Delta y + \Delta z), \quad (1.87)$$

joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\Delta V| \lesssim 10\,000(|\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|) \leq 10\,000(1 + 1 + 1) = 30\,000.$$

Koska $V(100, 100, 100) = 1\,000\,000$, niin tilavuudelle V saadaan arvio $97\,000 \lesssim V \lesssim 1\,030\,000$, ts. $V = 1\,000\,000 \pm 30\,000 \text{ mm}^3$.

b) Jos x mitataan 1 %:n tarkkuudella, y 2 %:n tarkkuudella ja z 3 %:n tarkkuudella, niin arvioi tilavuuden suhteellista virhettä.

Ratkaisu. Nyt $|\Delta x|/|x| \leq 0,01$, $|\Delta y|/|y| \leq 0,02$ ja $|\Delta z|/|z| \leq 0,03$ ja koska $V = xyz$, niin yhtälön (1.87) nojalla (arvioidaan tässä $x_0 \approx x$, $y_0 \approx y$ ja $z_0 \approx z$)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}.$$

Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\frac{|\Delta V|}{|V|} \lesssim \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} + \frac{|\Delta z|}{|z|} \leq 0,01 + 0,02 + 0,03 = 0,06,$$

joten V :n suhteellisen virheen arvioidaan olevan korkeintaan 6 %.

Lause 1.88. *Pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ differentioituva funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä \mathbf{a} .*

Todistus. $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \rightarrow f(\mathbf{a})$, kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. □

Funktion toteaminen differentioituvaksi suoraan määritelmää käyttäen on hankalaa. Usein sovelluksissa funktion osittaisderivaatat ovat jatkuvia, mikä seuraavan lauseen mukaan riittää takaamaan differentioituvuuden.

Määritelmä 1.89. Jos funktiolla $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvat osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, niin sanotaan, että f on *jatkuvasti differentioituva* (*continuously differentiable*).

Lause 1.90. *Jatkuvasti differentioituva funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva.*

Todistus. Todistetaan väite kahden muuttujan funktiolle $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($n:n$ muuttujan tapaus vastaavasti). Tarkastellaan f :n differentioituvuutta pisteessä (a, b) :

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] + [f(a+h, b) - f(a, b)] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+t_1)k \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \epsilon_1(h)h \right]. \end{aligned}$$

Tässä ensimmäisessä hakasulkulausekkeessa on sovellettu differentiaalilaskennan väliarvolausetta [11, lause 5.51] funktioon $g(t) = f(a+h, b+t)$ välillä $[0, k]$ tai $[k, 0]$ (riippuen k :n etumerkistä). Luku t_1 on $0:n$ ja $k:n$ välissä ja riippuu sekä h :sta että k :sta, ts. $t_1 = t_1(h, k)$. Toisessa hakasulkulausekkeessa on kirjoitettu osittaisderivaatan $\frac{\partial f}{\partial x}$ määritelmä pisteessä (a, b) . Vertaa sivun 42 kuvaan. Koska $\frac{\partial f}{\partial y}$ on jatkuva, niin

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+t_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \epsilon_2(h, t_1),$$

missä $\epsilon_2(h, t_1) \rightarrow 0$, kun $(h, t_1) \rightarrow (0, 0)$. Koska t_1 on $0:n$ ja $k:n$ välissä, niin $(h, t_1) \rightarrow (0, 0)$, ja siten $\epsilon_2(h, t_1) \rightarrow 0$, kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Nyt

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \epsilon_1(h)h + \epsilon_2(h, t_1)k.$$

On osoitettava, että virhetermi on oikeaa muotoa, ts. että jos valitaan $\epsilon(h, k)$ siten, että

$$\epsilon_1(h)h + \epsilon_2(h, t_1)k = \epsilon(h, k)\|(h, k)\|,$$

niin $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Näin on, sillä

$$\begin{aligned} |\epsilon(h, k)| &= \frac{|\epsilon_1(h)h + \epsilon_2(h, t_1)k|}{\|(h, k)\|} \leq |\epsilon_1(h)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |\epsilon_2(h, t_1)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq |\epsilon_1(h)| + |\epsilon_2(h, t_1)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. □

Esimerkki 1.91. Esimerkissa 1.79 funktio $f(x, y) = x^3 + xy - y$ todistettiin differentioituvaksi käyttäen differentioituvuuden määritelmää. Lauseen 1.90 mukaan f :n osoittamiseksi differentioituvaksi riittää todeta, että f :n osittaisderivaatat $f_x(x, y) = 3x^2 + y$ ja $f_y(x, y) = x - 1$ ovat jatkuvia.

1.7 Vektori-arvoiset funktiot ja ketjusääntö

Vektori-arvoinen funktio eli *kuvaus (mappnig)* $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$, kuvaa alkion $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ alkioksi $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Merkitään

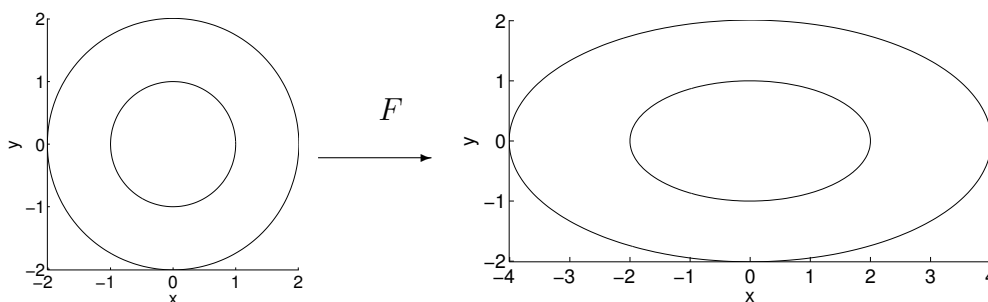
$$F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})).$$

Reaaliarvoiset funktiot $f_1, f_2, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ovat F :n *koordinaattifunktioita* (*komponenttifunktioita*).

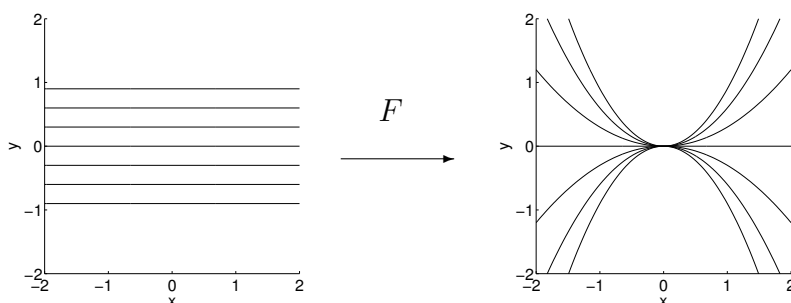
Esimerkki 1.92. Kuvaus $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ on *napakoordinaattikuvaus*, joka ilmoittaa napakoordinaateissa (r, θ) annetun pisteen xy -koordinaateissa $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ ja $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$.

Jos n ja $m \leq 3$, saattaa funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ käyttäytymisen havainnollistaminen olla mahdollista kuvan avulla. Esimerkiksi jos $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, voi sopivien käyrien C ja niitä vastaavien kuvajoukkojen $F(C)$ piirtäminen auttaa.

Esimerkki 1.93. a) Olkoon $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2x, y)$. Kukin origokeskinen ympyrä kuvautuu origokeskiseksi ellipsiksi. Itse asiassa F on lineaarikuvaus, joka venyttää x -suunnassa. Katso lisää esimerkkejä venyttävistä, kutistavista, kiertävistä ja vinouttavista lineaarikuvauksista $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kurssilta Insinöörimatematiikka 2u.



b) Olkoon $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, x^2y)$. Kukin suora $y = c$ kuvautuu käyräksi $y = cx^2$. Voidaan ajatella, että joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ kuvaus puristaa kohti x -akselia ja joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1 \text{ tai } x > 1\}$ kuvaus venyttää pois päin x -akselista.



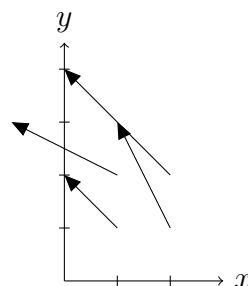
Tapauksissa $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ F voidaan tulkita *vektorikentäksi*, jota voidaan havainnollistaa piirtämällä sopivin välein pisteisiin \mathbf{x} vektorit $F(\mathbf{x})$. Vektorikenttiä tutkitaan tarkemmin opintojaksolla Vektorianalyysi.

Esimerkki 1.94. Piirrä kuva vektorikentästä **a)** $F(x, y) = (-y, x)$,

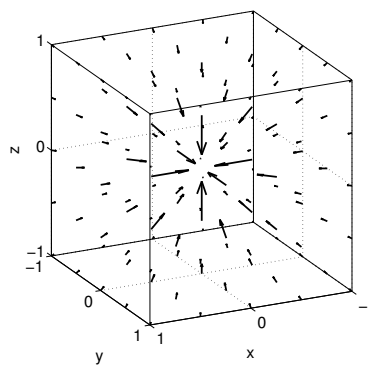
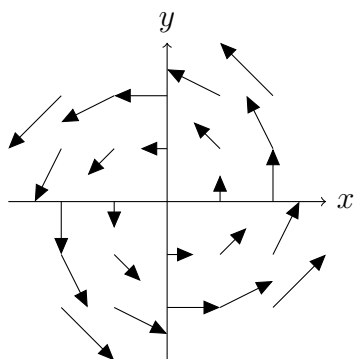
b) negatiivisen pistevarauksen sähkökentästä $E(\mathbf{x}) = -c \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ ($c > 0$).

Ratkaisu. **a)** Lasketaan F :n arvot esimerkiksi pisteissä $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ ja $(2, 2)$ ja piirretään kuvavektorit ko. pisteisiin:

\mathbf{x}	$F(\mathbf{x})$
$(1, 1)$	$F(1, 1) = (-1, 1)$
$(1, 2)$	$F(1, 2) = (-2, 1)$
$(2, 1)$	$F(2, 1) = (-1, 2)$
$(2, 2)$	$F(2, 2) = (-2, 2)$



Kentän F piirtämiseksi tarkemmin (vasemmanpuoleinen kuva alla) on laskettu enemmän pisteitä ja skaalattu luettavuuden parantamiseksi kuvavektoreita kertoimella 0,5. Kenttä voisi olla esimerkiksi vastapäivään origon ympäri tapahtuvan tasaisen pyörimisliikkeen nopeuskenttä.



b) Muokataan kentän lauseketta:

$$E(\mathbf{x}) = -c \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = -\frac{c}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Tässä vektori $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ on ykkösen mittainen ja osoittaa origosta poispäin. Kuvavektoreiden $E(\mathbf{x})$ pituus eli kentän *voimakkuus* on

$$\|E(\mathbf{x})\| = \left\| -\frac{c}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \left| -\frac{c}{\|\mathbf{x}\|^2} \right| \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Tässä käytettiin normin ominaisuutta $\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$, ks. [16, Thm 1.3]. Kerroin $c/\|\mathbf{x}\|^2$ kertoo siis, että kentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden $\|\mathbf{x}\|$ neliöön. Miinusmerkki kääntää vektorit kohti origoa. Kenttää $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvataan oikeanpuoleisessa kuvassa.

1.7.1 Raja-arvo ja jatkuvuus

Vektoriarvoisen funktion raja-arvo ja jatkuvuus määritellään samaan tapaan kuin reaaliarvoisen funktionkin (vrt. määritelmät 1.24 ja 1.35). Nyt vain kuvapuolella käytetään itseisarvon $|\cdot|$ sijasta normia $\|\cdot\|$.

Määritelmä 1.95. Olkoon $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja olkoon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ F :n määrittelyjoukon $D \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste. Tällöin funktiolla F on *raja-arvo* $L \in \mathbb{R}^m$ pisteessä \mathbf{a} , merkitään

$$L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) \quad \text{tai} \quad F(\mathbf{x}) \rightarrow L, \text{ kun } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a},$$

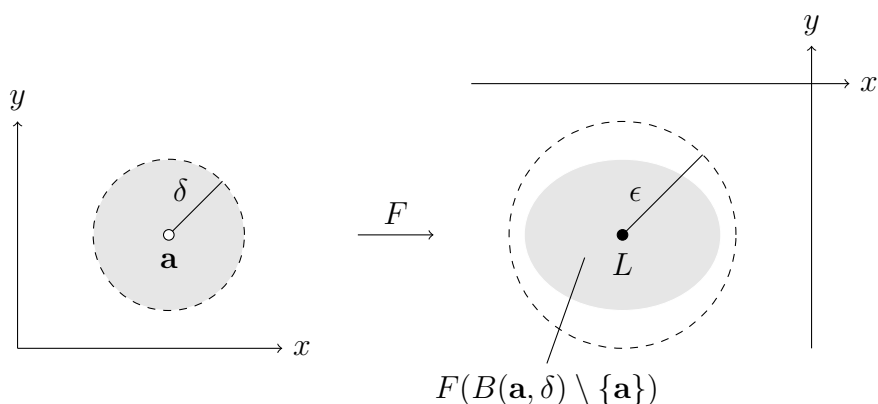
jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\mathbf{x} \in D \text{ ja } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|F(\mathbf{x}) - L\| < \epsilon. \quad (1.96)$$

Määritelmän ehto (1.96) tarkoittaa, että \mathbf{a} -keskinen δ -säteinen punkteerattu pallo (tai tarkalleen ottaen punkteeratun pallon ja D :n leikkaus) kuvautuu L -keskiseen ϵ -säteiseen palloon, ts.

$$F(B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \subset B(L, \epsilon).$$

Tässä $B(\mathbf{a}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ ja $B(L, \epsilon) \subset \mathbb{R}^m$. Kaaviokuva tapauksesta $n = m = 2$:



Raja-arvon määritelmässä F :n ei tarvitse olla määritelty pisteessä \mathbf{a} . Jos kuitenkin on, voidaan kysyä, onko raja-arvo sama kuin funktion arvo:

Määritelmä 1.97. Olkoon $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja olkoon $\mathbf{a} \in D$ F :n määrittelyjoukon D kasautumispiste. Tällöin F on *jatkuva pisteessä \mathbf{a}* , jos

$$F(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}).$$

Jos F on jatkuva kaikissa D :n pisteissä, niin F on *jatkuva*. (Sovitaan, että D :n muissa pisteissä kuin kasautumispisteissä F on jatkuva.)

Usein jatkuvuuden määritelmä esitetään seuraavassa $\epsilon\delta$ -muodossa.

Lause 1.98. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on on jatkuva määrittelyjoukon D kasautumispisteessä \mathbf{a} jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\mathbf{x} \in D \text{ ja } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a})\| < \epsilon.$$

Todistus. Seuraa suoraan määritelmistä 1.95 ja 1.97. □

Vektoriarvoisen funktion raja-arvon ja jatkuvuuden tarkastelu palautuu koordinaattifunktioiden tarkasteluun.

Lause 1.99. Olkoon $F = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tällöin

- (1) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_m(\mathbf{x}) \right)$
- (2) F on jatkuva pisteessä \mathbf{a} jos ja vain jos jokainen koordinaattifunktio f_i on jatkuva pisteessä \mathbf{a} .

Todistus. (1) On osoitettava, että on olemassa $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = L = (L_1, \dots, L_m)$ jos ja vain jos on olemassa $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$.
 ” \Rightarrow ” Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\|F(\mathbf{x}) - L\| < \epsilon$ aina kun $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$. Jos nyt $i \in \{1, \dots, m\}$, niin

$$\begin{aligned} |f_i(\mathbf{x}) - L_i| &= \sqrt{(f_i(\mathbf{x}) - L_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - L_1)^2 + \dots + (f_m(\mathbf{x}) - L_m)^2} \\ &= \|F(\mathbf{x}) - L\| < \epsilon \end{aligned}$$

aina kun $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, eli on olemassa $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$.

” \Leftarrow ” Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin jokaisella $i \in \{1, \dots, m\}$ on olemassa $\delta_i > 0$ siten, että $|f_i(\mathbf{x}) - L_i| < \epsilon/\sqrt{m}$ aina kun $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_i$. Asetetaan $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Nyt

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{x}) - L\| &= \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - L_1)^2 + \dots + (f_m(\mathbf{x}) - L_m)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m} + \dots + \frac{\epsilon^2}{m}} = \sqrt{m \frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon \end{aligned}$$

aina kun $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, eli on olemassa $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = L$.

(2) Seuraa kohdasta (1). □

Esimerkki 1.100. Funktio $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x - z}, \ln(x + yz) \right)$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq z \text{ ja } x + yz > 0\}$.

Jatkuvien funktioiden summa on jatkuva ja samoin reaalityyppillä kerrottu jatkuva funktio.

Lause 1.101. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja funktiot $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ovat jatkuvia pisteessä \mathbf{a} , niin myös funktiot $F + G$ ja λF ovat jatkuvia pisteessä \mathbf{a} .

Todistus. Komponenttifunktiot ovat jatkuvia lauseen 1.36 nojalla, jolloin lauseen 1.99 mukaan funktiot ovat jatkuvia. □

Lause 1.102. Olkoon $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ jatkuva pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva pisteessä $G(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^p$. Tällöin yhdistetty funktio $F \circ G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x}))$ on jatkuva pisteessä \mathbf{a} .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^p & & \mathbb{R}^m \\ \bullet & \xrightarrow{G} & \bullet & \xrightarrow{F} & \bullet \\ \mathbf{a} & & G(\mathbf{a}) & & F(G(\mathbf{a})) \end{array}$$

Todistus. Samaan tapaan kuin reaalifunktioille [11, lause 4.12]; korvaa itseisarvo $|\cdot|$ normilla $\|\cdot\|$. \square

1.7.2 Differentioituvuus

Luvussa 1.6 reaaliarvoista funktiota $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ approksimoitiin pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ suhteen derivaattamatriisia käyttäen:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h},$$

missä

$$f'(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right] \quad \text{ja} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Yleistetään derivaattamatriisi, differentioituvuus ja lineaarinen approksimointi funktiolle $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Määritelmä 1.103. Olkoon funktion $F = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kaikilla koordinaattifunktioilla f_j kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ pisteessä \mathbf{x} . $m \times n$ -matriisia

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

kutsutaan funktion F *derivaattamatriisiksi* eli *Jacobin matriisiksi* (*derivative matrix*, *Jacobian matrix*) pisteessä \mathbf{x} . Derivaattamatriisille käytetään myös merkintää $DF(\mathbf{x})$.

Merkintää $D_i f_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ käyttäen voidaan kirjoittaa

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.104)$$

Nyt (kerro matriisiin $F'(\mathbf{a})$ rivit pystyvektorilla \mathbf{h})

$$F'(\mathbf{a})\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1(\mathbf{a})\mathbf{h} \\ f'_2(\mathbf{a})\mathbf{h} \\ \vdots \\ f'_n(\mathbf{a})\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

ja siten

$$F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})\mathbf{h} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_1(\mathbf{a})\mathbf{h} \\ f'_2(\mathbf{a})\mathbf{h} \\ \vdots \\ f'_n(\mathbf{a})\mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) + f'_1(\mathbf{a})\mathbf{h} \\ f_2(\mathbf{a}) + f'_2(\mathbf{a})\mathbf{h} \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) + f'_n(\mathbf{a})\mathbf{h} \end{bmatrix}. \quad (1.105)$$

Summa $F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})\mathbf{h}$ on $n \times 1$ -matriisi, jonka alkioina ovat F :n koordinaattifunktioiden f_j lineaariset approksimaatiot pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ suhteen. Niinpä määrittelemme:

Määritelmä 1.106. Funktio $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *differentioituva pisteessä* \mathbf{a} , jos F :n kaikilla koordinaattifunktioilla on kaikki osittaisderivaatat pisteessä \mathbf{a} ja jos

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathcal{E}(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|, \quad (1.107)$$

missä $\mathcal{E}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on funktio, jolle $\mathcal{E}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Edelleen F on *differentioituva*, jos se on differentioituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Lineaarikuvausta $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $L(\mathbf{h}) = F'(\mathbf{a})\mathbf{h}$ kutsutaan funktion F *derivaataksi (derivative)* pisteessä \mathbf{a} . Jos merkitään $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, niin funktio $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (1.108)$$

on F :n *linearisointi* pisteen \mathbf{a} suhteen ja arvio

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})\mathbf{h} \quad (1.109)$$

eli $F(\mathbf{x}) \approx T(\mathbf{x})$ on funktion F *lineaarinen approksimaatio* pisteen \mathbf{a} suhteen.

Esimerkki 1.110. Olkoon $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 - x \ln z)$. Kirjoita F :n linearisointi pisteen $(2, 2, 1)$ suhteen ja arvioi sillä F :n arvoa pisteessä $(1,98, 2,01, 1,03)$.

Ratkaisu. Lasketaan derivaattamatriisi:

$$F'(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{bmatrix},$$

joten

$$F'(2, 2, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Koska $F(2, 2, 1) = (6, 4)$, niin linearisoinniksi (1.108) saadaan

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 2 \\ z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x + y + 2z - 12 \\ 4y - 2z - 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4x + y + 2z - 6 \\ 4y - 2z - 2 \end{bmatrix} = (4x + y + 2z - 6, 4y - 2z - 2). \end{aligned}$$

Tässä matriisitulon (ja summan) laskemista varten vektorit täytyy kirjoittaa pystyvektoreina. Funktion lauseke voidaan lopuksi ilmoittaa pysty- tai vaakavektorina. Kysytty arvio on nyt

$$\begin{aligned} F(1,98, 2,01, 1,03) &\approx T(1,98, 2,01, 1,03) \\ &= (4 \cdot 1,98 + 2,01 + 2 \cdot 1,03 - 6, 4 \cdot 2,01 - 2 \cdot 1,03 - 2) = (5,99, 3,98). \end{aligned}$$

Voitaisiin laskea myös suoraan erotuksia $\Delta x = 1,98 - 2 = -0,02$, $\Delta y = 2,01 - 2 = 0,01$ ja $\Delta z = 1,03 - 1 = 0,03$ käyttäen: merkitään $\mathbf{h} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z]^T$, jolloin arvio (1.109) on

$$F(1,98, 2,01, 1,03) \approx \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,02 \\ 0,01 \\ 0,03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,99 \\ 3,98 \end{bmatrix}.$$

Tulosta voi verrata oikeaan nelidesimaaliseen likiarvoon $F(1,98, 2,01, 1,03) \approx (5,9907, 3,9816)$.

Voidaan osoittaa, että lineaarinen approksimaatio toimii vain differentioituville funktioille ja derivaattamatriisille:

Lause 1.111. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä \mathbf{a} jos ja vain jos on olemassa $m \times n$ -matriisi M , jolle

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + M\mathbf{h} + \mathcal{E}(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|,$$

missä $\mathcal{E}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Tällöin $M = F'(\mathbf{a})$.

Huomautus 1.112. Differentioituvuuden määritelmän ehto (1.107) voidaan esittää yhtäpitävästi erotusosamäärämuodossa

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

Lause 1.113. Differentioituva funktio $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva.

Todistus. Samaan tapaan kuin lause 1.88. □

Lause 1.114. Funktio $F = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ jos ja vain jos jokainen koordinaattifunktio f_j on differentioituva pisteessä \mathbf{a} .

Todistus. Merkitse $\mathcal{E}(\mathbf{h}) = [\epsilon_1(\mathbf{h}) \ \cdots \ \epsilon_m(\mathbf{h})]^T$ ja kirjoita yhtälö (1.107) komponenteittain yhtälöä (1.105) käyttäen. □

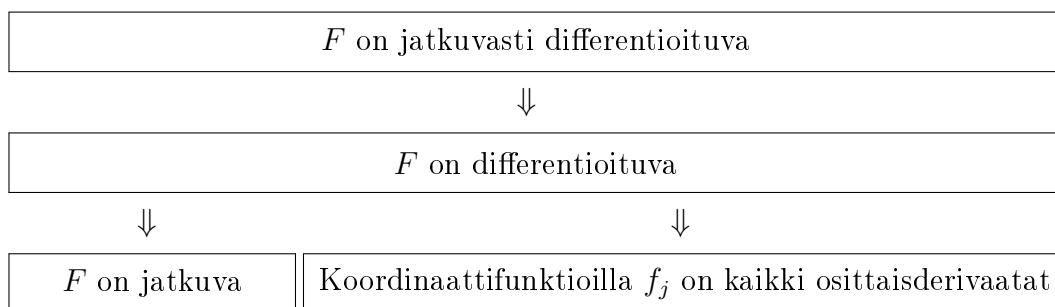
Käytännössä funktion F differentioituvuus todetaan osittaisderivaattojen avulla:

Määritelmä 1.115. Jos funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kaikkien koordinaattifunktioiden f_j kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ ovat jatkuvia, niin F on *jatkuvasti differentioituva*.

Lause 1.116. Jos funktio $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuvasti differentioituva, niin F on differentioituva.

Todistus. Seuraa lauseista 1.114 ja 1.90. □

Käänteinen väite ei päde: F voi olla differentioituva pisteessä \mathbf{a} , jossa kaikki osittaisderivaatat eivät ole jatkuvia. Yhteenvedona todetaan, että seuraavat implikaatiot pätevät, mutta käänteiset väitteet eivät päde:



1.7.3 Ketjusääntö

Lause 1.117 (Ketjusääntö, Chain Rule). *Olkoon $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ differentioituva pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentioituva pisteessä $G(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^p$. Tällöin yhdistetty funktio $H = F \circ G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $H(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x}))$ on differentioituva pisteessä \mathbf{a} ja*

$$H'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a}))G'(\mathbf{a}). \quad (1.118)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^p & & \mathbb{R}^m \\ \bullet & \xrightarrow{G} & \bullet & \xrightarrow{F} & \bullet \\ \mathbf{x} & & G(\mathbf{x}) & & F(G(\mathbf{x})) \end{array}$$

Todistus. Käytetään ensin G :n differentioituvuutta pisteessä \mathbf{a} ja sitten F :n differentioituvuutta pisteessä $G(\mathbf{a})$:

$$\begin{aligned} F(G(\mathbf{a} + \mathbf{h})) &= F\left(G(\mathbf{a}) + \underbrace{G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathcal{E}_G(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|}_{=\mathbf{k}}\right) \\ &= F(G(\mathbf{a})) + F'(G(\mathbf{a}))\mathbf{k} + \mathcal{E}_F(\mathbf{k})\|\mathbf{k}\| \\ &= F(G(\mathbf{a})) + F'(G(\mathbf{a}))G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \underbrace{F'(G(\mathbf{a}))\mathcal{E}_G(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| + \mathcal{E}_F(\mathbf{k})\|\mathbf{k}\|}_{=:\mathcal{E}(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|} \\ &= F(G(\mathbf{a})) + F'(G(\mathbf{a}))G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathcal{E}(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|, \end{aligned}$$

missä $\mathcal{E}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Soveltamalla lausetta 1.111 nähdään, että $F \circ G$ on differentioituva \mathbf{a} :ssa ja että derivaattamatriisi on $M = F'(G(\mathbf{a}))G'(\mathbf{a})$. \square

Esimerkki 1.119. Olkoon $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $G(x, y, z) = (xz, xy, yz^2)$ ja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow$

\mathbb{R}^2 , $F(u, v, w) = (\sin(u + w), uv^2w)$. Nyt

$$G'(x, y, z) = \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix} \quad \text{ja}$$

$$F'(u, v, w) = \begin{bmatrix} \cos(u + w) & 0 & \cos(u + w) \\ v^2w & 2uvw & uv^2 \end{bmatrix},$$

joten

$$\begin{aligned} (F \circ G)'(x, y, z) &= F'(G(x, y, z))G'(x, y, z) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(xz + yz^2) & 0 & \cos(xz + yz^2) \\ x^2y^3z^2 & 2x^2y^2z^3 & x^3y^2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \cos(xz + yz^2) & z^2 \cos(xz + yz^2) & (x + 2yz) \cos(xz + yz^2) \\ 3x^2y^3z^3 & 3x^3y^2z^3 & 3x^3y^3z^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lasku voidaan tarkastaa muodostamalla ensin yhdistetyn funktion lauseke

$$(F \circ G)(x, y, z) = (\sin(xz + yz^2), x^3y^3z^3)$$

ja muodostamalla tälle derivaattamatriisi suoraan määritelmää 1.103 käyttäen. Kokeile!

Kirjoittamalla matriisitulo (1.118) auki saadaan mm. seuraavat usein esiintyvät erikoistapaukset:

Tapaus $n = m = 1$, $p = 3$.

Olkoon $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$. Tällöin yhdistetty funktio $w(t) = f(\mathbf{r}(t))$ on reaalfunktio ja saadaan ketjusääntö

$$\frac{dw}{dt} = f'(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix},$$

ts.

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}} \quad (1.120)$$

Tapaus $n = 3$, $p = m = 1$.

Olkoon $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, y, z)$ ja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(u)$. Tällöin yhdistetyn funktion $w(x, y, z) = f(u(x, y, z))$ derivaattamatriisi on

$$\begin{aligned} w'(x, y, z) &= f'(u(x, y, z))u'(x, y, z) = \begin{bmatrix} df \\ du \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

mistä voidaan poimia w :n osittaisderivaatat

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial z}}. \quad (1.121)$$

Tapaus $n = 2$, $p = 3$, $m = 1$.

Olkoon $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$. Tällöin yhdistetyn funktion $w(u, v) = f(G(u, v))$ derivaattamatriisi on

$$\begin{aligned} w'(u, v) &= f'(G(u, v))G'(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

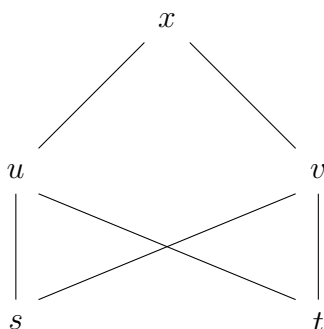
joten w :n osittaisderivaatat ovat

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}} \quad (1.122)$$

Esimerkki 1.123. Olkoon $x = uv$ ja $y = u - v$, missä $u = s + t$ ja $v = s^2 + t^2$.

Laske $\frac{\partial x}{\partial s}$ ja $\frac{\partial y}{\partial t}$.

Ratkaisu. Käytetään ketjusääntöä samaan tapaan kuin edellä.



Muistisäännöksi voidaan rakentaa kuvan mukainen riippuvuuskaavio: x riippuu u :sta ja v :stä, u s :tä ja t :stä sekä v s :tä ja t :stä, joten

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} = v \cdot 1 + u \cdot 2s = (s^2 + t^2) + (s+t)2s = 3s^2 + 2st + t^2.$$

Samaan tapaan lasketaan

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = 1 - 2t.$$

Laske vastaavalla tavoin myös osittaisderivaatat $\frac{\partial x}{\partial t}$ ja $\frac{\partial y}{\partial s}$.

Aina voidaan käyttää myös matriisituloa: merkitään $G(s, t) = (s + t, s^2 + t^2) = (u(s, t), v(s, t))$ ja $F(u, v) = (uv, u - v) = (x(u, v), y(u, v))$. Näiden derivaattamatriisit ovat

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & u \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad G'(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2s & 2t \end{bmatrix},$$

joten

$$\begin{aligned} (F \circ G)'(s, t) &= F'(G(s, t))G'(s, t) = \begin{bmatrix} s^2 + t^2 & s + t \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2s & 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3s^2 + 2st + t^2 & s^2 + 3t^2 + 2st \\ 1 - 2s & 1 - 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

josta kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ ja $\frac{\partial y}{\partial t}$ voidaan lukea.

Esimerkki 1.124. Oletetaan, että ilmakehän lämpötila pisteessä (x, y, z) (km) on

$$T(x, y, z) = \frac{xy}{1+z} \quad (^\circ\text{C})$$

ja että ilmapalloon kiinnitetty sääluotain kulkee pitkin käyrää

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t, t - t^2) \quad (\text{km}),$$

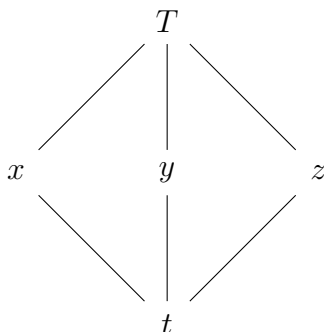
missä ajan t yksikkönä on tunti ($0 \leq t \leq 1$). Laske sääluotaimen kokema lämpötilan muutosnopeus ajan funktiona hetkellä $t = 1/2$.

Ratkaisu. Ketjusäännöllä (ks. kuva)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{y}{1+z} + 2 \frac{x}{1+z} - \frac{xy}{(1+z)^2} (1-2t).$$

Ajanhetkellä $t = 1/2$ on $x = t = 1/2$, $y = 2t = 1$ ja $z = t - t^2 = 1/4$, joten

$$\frac{dT}{dt} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + 0 = \frac{8}{5} = 1,6 \quad (^\circ\text{C/h}).$$



Esimerkki 1.125. Oletetaan, että kaasunäyte noudattaa ideaalikaasun tilanyhtälöä $pV = nRT$. Tarkasteluhetkellä tilavuus $V = 10$ l, paine $p = 2$ atm ja lämpötila $T = 300$ K. Ainemäärä n ja kaasuvakio R ovat vakioita. Tiedetään, että paine kasvaa 1 atm/min ja lämpötila kasvaa 10 K/min. Mikä on tilavuuden muutosnopeus ajan funktiona kyseisellä ajanhetkellä?

Ratkaisu. Alkutilanteen perusteella ratkaistaan $nR = pV/T = 2 \cdot 10/300 = 1/15$, joten

$$V = V(p, T) = nR \frac{T}{p} = \frac{1}{15} \frac{T}{p},$$

missä p ja T ovat ajan t (min) funktiota: $p = p(t)$ ja $T = T(t)$. Ketjusäännöllä

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial T} \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{15} \frac{T}{p^2} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{15} \frac{1}{p} \frac{dT}{dt}.$$

Sijoittamalla tähän $p = 2$, $T = 300$, $\frac{dp}{dt} = 1$ ja $\frac{dT}{dt} = 10$ saadaan vastaukseksi

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{15} \frac{300}{2^2} + \frac{1}{15} \frac{1}{2} \cdot 10 \approx -4,7 \quad (\text{l/min}).$$

Huomautus 1.126. Esimerkissä 1.124 $x(t)$:n, $y(t)$:n ja $z(t)$:n lausekkeet tunnetaan, joten oltaisiin voitu sijoittaa ne $T(x, y, z)$:n lausekkeeseen ja derivoida näin saatu yhden muuttujan funktio t :n suhteen. Kokeile! Esimerkissä 1.125 tunnetaan $p(t)$:n ja $T(t)$:n muutosnopeudet, mutta ei niiden lausekkeita, joten on pakko käyttää kahden muuttujan funktion ketjusääntöä.

1.7.4 Käänteiskuvauslause

Kerrataan aluksi reaalifunktioita $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Oletetaan, että f on derivoituva ja että derivaatta on jatkuva. Oletetaan lisäksi, että $f'(a) \neq 0$ jollakin $a \in \mathbb{R}$. Tällöin $f'(x) < 0$ tai $f'(x) > 0$ jossakin a :n ympäristössä (x_0, x_1) , ja f on siten aidosti kasvava tai aidosti vähenevä välillä (x_0, x_1) . Niinpä f :llä on käänteisfunktio f^{-1} ko. välillä. Lisäksi käänteisfunktio on derivoituva ja Insinöörimatematiikka 1u:lta muistetaan, että

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Tämä tulos yleistyy seuraavasti kuvauksille $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Lause 1.127 (Käänteiskuvauslause). *Jos $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuvasti differentioituva ja pisteessä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ on $\det(F'(\mathbf{a})) \neq 0$, niin jossakin \mathbf{a} :n ympäristössä U rajoittuma $F: U \rightarrow F(U)$ on bijektio, jonka käänteiskuvaus F^{-1} on myös jatkuvasti differentioituva. Lisäksi*

$$(F^{-1})'(F(\mathbf{a})) = F'(\mathbf{a})^{-1}. \quad (1.128)$$

Todistuksen idea. **a)** Käänteiskuvauksen F^{-1} olemassaolo: F :n differentioituvuuden nojalla

$$F(\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \underbrace{(F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})\mathbf{a})}_{\text{vakio}} + F'(\mathbf{a})\mathbf{x}.$$

Koska $\det(F'(\mathbf{a})) \neq 0$, niin matriisi $F'(\mathbf{a})$ on kääntyvä, ja siten lineaarikuvaus $L(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{a})\mathbf{x}$ on kääntyvä. Niinpä myös F on bijektio lähellä pistettä \mathbf{a} (arvion ” \approx ” tarkempi käsittely sivuutetaan).

b) Kaava: Koska yhdistetty kuvaus $(F^{-1} \circ F)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ on identtinen funktio,

niin sen derivaattamatriisi on jokaisessa pisteessä (erityisesti \mathbf{a} :ssa) yksikkö-matriisi I . Ketjusäännöllä saadaan siten

$$I = (F^{-1} \circ F)'(\mathbf{a}) = (F^{-1})'(F(\mathbf{a}))F'(\mathbf{a}),$$

josta väitetty kaava seuraa kertomalla yhtälö puolittain oikealta käänteismatriisilla $F'(\mathbf{a})^{-1}$. \square

Lauseessa esiintyvää determinanttia kutsutaan *Jacobin determinantiksi* (*Jacobian*) ja merkitään

$$J_F(\mathbf{x}) = \det(F'(\mathbf{x})).$$

Palataan em. reaali-funktioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Lähellä a :ta f :ää voidaan approksimoida tangenttisuorallaan, jonka kulmakerroin on $f'(a)$. a :n sisältävän pienen välin I kuvan $f(I)$ pituus on siis noin $|f'(a)|$ kertaa I :n pituus.

Jatkuvasti differentioituvalle funktiolle $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pätee vastaava tulos. F :ää voidaan lähellä pistettä \mathbf{a} approksimoida lineaarikuvauksen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avulla. Merkitään L :n matriisia M :llä. Silloin kuvajoukon $L(A)$ pinta-ala on $|\det(M)|$ -kertainen joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ pinta-alaan verrattuna (ks. Insinöörimatematiikka 2u). Niinpä \mathbf{a} :n sisältävän pienen joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ kuvan $F(A)$ pinta-ala on noin $|J_F(\mathbf{a})|$ kertaa A :n pinta-ala. Lukua $|J_F(\mathbf{a})|$ kutsutaan funktiolle $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *pinta-alan suurennussuhteeksi*. Vastaavasti funktiolle $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Jacobin determinantin itseisarvo $|J_F(\mathbf{a})|$ on *tilavuuden suurennussuhde*.

1.8 Suunnattu derivaatta ja gradientti

Korvaamalla kantavektori \mathbf{e}_i mielivaltaisella yksikkövektorilla \mathbf{e} osittaisderivaatan määritelmässä 1.46 voidaan funktion muutosnopeutta tutkia muissakin kuin koordinaattiakselien suunnissa:

Määritelmä 1.129. Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *suunnattu derivaatta eli suuntaisderivaatta* (*directional derivative*) pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektorin $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ suuntaan on

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

(mikäli raja-arvo on olemassa).

Jos edellä $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i$, niin $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$.

Differentioituvalle funktiolle on määritelmän 1.82 mukaan kaikki osittaisderivaatat. Sillä on myös kaikki suunnatut derivaatat ja ne voidaan laskea osittaisderivaattojen avulla:

Lause 1.130. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x})$ on olemassa jokaiseen suuntaan $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{e}\| = 1$, ja

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Todistus. Kiinnitetään yksikkövektori \mathbf{e} ja merkitään $\mathbf{h} = h\mathbf{e}$. Tällöin $\|\mathbf{h}\| = |h|$. Käytetään näitä merkintöjä ja ratkaistaan $\epsilon(\mathbf{h})$ differentioituvuuden määritelmän yhtälössä (1.83):

$$\epsilon(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})h\mathbf{e}}{|h|}.$$

$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = 0$, josta seuraa

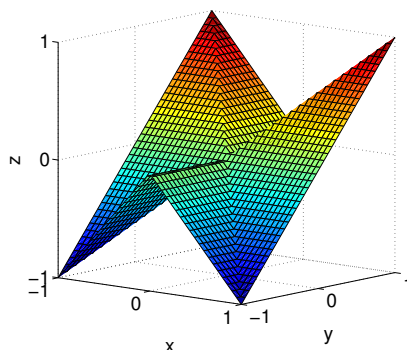
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})h\mathbf{e}}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{h} \right) - f'(\mathbf{x})\mathbf{e} \\ &= D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{e}. \end{aligned} \quad \square$$

Suunnatun derivaatan määritelmässä ja lauseessa 1.130 on oleellista, että vektorin \mathbf{e} pituus on 1. Tarvittaessa suuntavektori on normeerattava.

Käänteinen tulos ei päde: esimerkiksi funktiolla

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \min\{|x|, |y|\}, & \text{kun } y \neq 0, \\ 0, & \text{kun } y = 0, \end{cases}$$

on kaikki suunnatut derivaatat origossa, mutta f ei selvästikään ole differentioituva origossa (ks. kuva).



Otetaan rivimatriisille $f'(\mathbf{x})$ käyttöön seuraava merkintä.

Määritelmä 1.131. Olkoon funktiolla $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki osittaisderivaatat pisteessä \mathbf{x} . Vektoria

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

kutsutaan f :n *gradientiksi* (*gradient*) pisteessä \mathbf{x} . (∇ luetaan "nabla".)

Lauseen 1.130 kaava voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\boxed{D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}} \quad (1.132)$$

Lisäksi ketjusääntö (lause 1.117, tapaus $n = m = 1, p = 3$) tulee muotoon

$$\boxed{\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)} \quad (1.133)$$

Esimerkki 1.134. Laske funktion $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ hetkellinen muutosnopeus, kun pisteestä $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$ lähdetään kulkemaan vektorin $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ osoittamaan suuntaan.

Ratkaisu. On laskettava suunnattu derivaatta yksikkövektorin

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

suuntaan. Koska

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 - y^2, -2xy, -1),$$

niin

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = (2, -2, -1) \cdot \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) = \frac{4}{7}.$$

Funktio siis kasvaa hetkellisesti $4/7$:n verran pituusyksikköä kohden lähdettäessä \mathbf{u} :n suuntaisesti pisteestä \mathbf{p} .

Esimerkki 1.135. Palataan esimerkin 1.124 sääluotaimen, jossa ilmakehän lämpötila pisteessä (x, y, z) (km) on

$$T(x, y, z) = \frac{xy}{1+z} \quad (^\circ\text{C})$$

ja sääluotaimen paikka hetkellä t (h) on

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t, t - t^2) \quad (\text{km}).$$

Laske sääluotaimen kokema lämpötilan muutosnopeus **a)** paikan **b)** ajan suhteen hetkellä $t = 1/2$.

Ratkaisu. a) Koska $\mathbf{r}'(t) = (1, 2, 1 - 2t)$, niin hetkellä $t = 1/2$ luotaimen paikka on $\mathbf{r}(1/2) = (1/2, 1, 1/4) =: \mathbf{p}$ ja kulkusuunta $\mathbf{r}'(1/2) = (1, 2, 0) =: \mathbf{u}$. Normeerataan \mathbf{u} ja lasketaan gradientti:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{(1, 2, 0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

ja

$$\nabla T(x, y, z) = \left(\frac{y}{1+z}, \frac{x}{1+z}, -\frac{xy}{(1+z)^2} \right).$$

Kysytty muutosnopeus on

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}}T(\mathbf{p}) &= \nabla T(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{8}{25} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) \\ &= \frac{8}{5\sqrt{5}} \approx 0,72 \quad (\text{°C/km}). \end{aligned}$$

b) Kysytty muutosnopeus saadaan ketjusäännöllä (1.133):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(\mathbf{r}(1/2)) &= \nabla T(\mathbf{r}(1/2)) \cdot \mathbf{r}'(1/2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{8}{25} \right) \cdot (1, 2, 0) \\ &= \frac{8}{5} = 1,6 \quad (\text{°C/h}). \end{aligned}$$

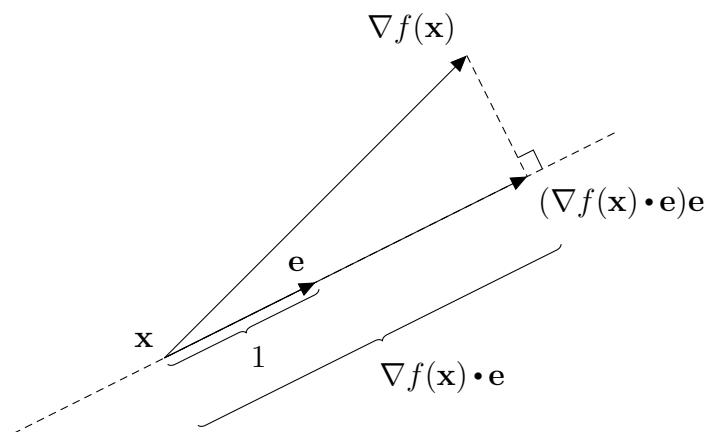
Tämä lasku on sama kuin esimerkissä 1.124, nyt vain gradientin avulla muotoiltuna.

Lause 1.136 (Gradientin geometrinen tulkinta). *Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä \mathbf{x} .*

- f :n suunnatun derivaatan maksimiarvo on $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ ja se saavutetaan gradientin $\nabla f(\mathbf{x})$ suunnassa $\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x})/\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.
- f vähenee nopeimmin gradientille vastakkaiseen suuntaan $-\nabla f(\mathbf{x})$, jossa suunnassa kasvunopeus on $-\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.
- Gradienttia vastaan kohtisuorissa suunnissa funktion paikallinen kasvunopeus on 0.

Toisin sanoen kussakin pisteessä gradienttivektori ilmoittaa suunnan, johon siirryttäessä funktio kasvaa paikallisesti (eli tehtäessä ”pieni” siirtymä) nopeimmin ja gradienttivektorin pituus ilmoittaa paikallisen kasvunopeuden ko. suunnassa.

Todistus. Aloitetaan geometrisella perustelulla \mathbb{R}^3 :ssa. Opintojaksolta Insinöörimatematiikka 2u muistetaan, että vektorin $\nabla f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ projektiio yksikkövektorille $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ on $(\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$. Yhtälön (1.132) mukaan skalaariprojektiio on $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$. Niinpä muutosnopeus $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x})$ on suurimmillaan, kun \mathbf{e} on samansuuntainen kuin $\nabla f(\mathbf{x})$, jolloin $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$, ja pienimmillään, kun \mathbf{e} ja $\nabla f(\mathbf{x})$ ovat vastakkaisuuntaisia, jolloin $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|$. Jos taas $\nabla f(\mathbf{x}) \perp \mathbf{e}$, niin selvästi $D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{x}) = 0$.



Tarkasti lause voidaan perustella Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöllä (ks. Insinöörimatematiikka 2u), jonka mukaan

$$|\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{e}\| = \|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

ts.

$$-\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

jossa vasemmanpuoleinen yhtäsuuruus saavutetaan, kun $\nabla f(\mathbf{x}) \uparrow \downarrow \mathbf{e}$ ja oikeanpuoleinen, kun $\nabla f(\mathbf{x}) \uparrow \uparrow \mathbf{e}$. Väite seuraa nyt yhtälöstä (1.132). \square

Esimerkki 1.137. Esimerkissä 1.135 luotain kulkee pisteessä $\mathbf{p} = (1/2, 1, 1/4)$ suuntaan $(1, 2, 0)$, jolloin sen kokema lämpötilan muutosnopeus on noin $0,72 \text{ }^\circ\text{C/km}$. Mihin suuntaan pisteestä \mathbf{p} pitäisi lähteä, jotta lämpötila kasvaisi mahdollisimman nopeasti? Mikä olisi tällöin lämpötilan muutosnopeus?

Ratkaisu. Olisi lähdettävä suuntaan

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{8}{25} \right),$$

jolloin muutosnopeus olisi

$$\|\nabla f(\mathbf{p})\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{25}\right)^2} \approx 0,95 \text{ } (^\circ\text{C/km}).$$

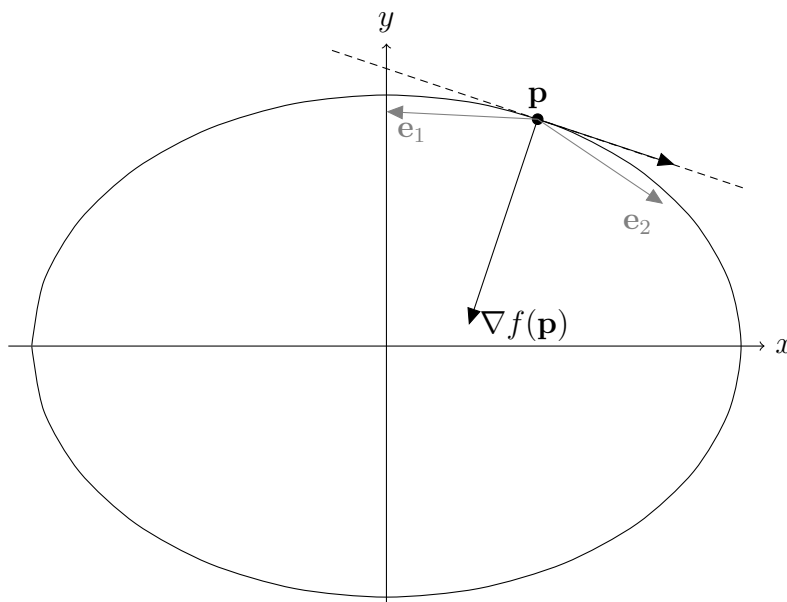
Esimerkki 1.138. Olkoon tunturin korkeus pisteessä (x, y) (m)

$$f(x, y) = \frac{11\,000}{10 + 2\left(\frac{x}{100}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{100}\right)^2} \quad (\text{m}).$$

Retkeilijä on huipun lähellä pisteessä $(200, 300)$.

- Mihin suuntaan rinne nousee jyrkimmin? Miten jyrkästi?
- Missä suunnissa ei ole nousua?
- Mihin suuntaan pitäisi lähteä, jotta nousukulma olisi 15° ?

Ratkaisu.



Tämän jyrkkähuippuisen tunturin korkein kohta on origossa korkeudella 1 100 m. Kuvassa on piste $\mathbf{p} = (200, 300)$ ja sen kautta kulkeva tasa-arvokäyrä (ellipsi) korkeudella 204 m. Kuvan vektorit on skaalattu piirtämistä varten sopivan pituisiksi.

a) Gradientti on

$$\nabla f(x, y) = -\frac{11\,000}{\left(10 + 2\left(\frac{x}{100}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{100}\right)^2\right)^2} \left(\frac{4x}{100^2}, \frac{8y}{100^2}\right),$$

joten nopeimman kasvun suunta on

$$\nabla f(200, 300) = \left(-\frac{220}{729}, -\frac{220}{243}\right) \approx (-0,30, -0,91).$$

Kasvunopeus on

$$\|\nabla f(200, 300)\| = \sqrt{\left(-\frac{220}{729}\right)^2 + \left(-\frac{220}{243}\right)^2} = \sqrt{\frac{959}{1053}} \approx 0,95 \quad (\text{m/m}).$$

Yhden metrin matkalla (vaakasuunnassa mitattuna) nousee noin 0,95 metriä. Tämä on nousukäyrän tangentin kulmakerroin, eli asteina nousun jyrkkyys on

$$\arctan \sqrt{\frac{959}{1053}} \approx 44^\circ.$$

b) Kasvunopeus on nolla gradienttia vastaan kohtisuorissa suunnissa, eli tässä tapauksessa vektorin

$$\left(\frac{220}{243}, -\frac{220}{729}\right) \approx (0,91, -0,30)$$

virittämässä suunnassa.

c) Vaaditaan, että nousukäyrän kulmakerroin on $\tan(15^\circ)$. On siis lähdettävä suuntaan $\mathbf{e} = (a, b)$, jolle

$$\begin{cases} D_{\mathbf{e}}f(200, 300) = \nabla f(200, 300) \cdot (a, b) = -\frac{220}{729}a - \frac{220}{243}b = \tan(15^\circ), \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Ratkaistaan tämä yhtälöpari numeerisesti: saadaan kaksi ratkaisua $\mathbf{e}_1 \approx (-1,00, 0,83)$ ja $\mathbf{e}_2 \approx (0,05, -0,56)$.

Lause 1.139. a) Jos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva ja $\mathbf{r}(t)$ on tasa-arvojoukon $f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ sileä käyrä, niin

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

kaikilla t . Geometrisesti: gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan.

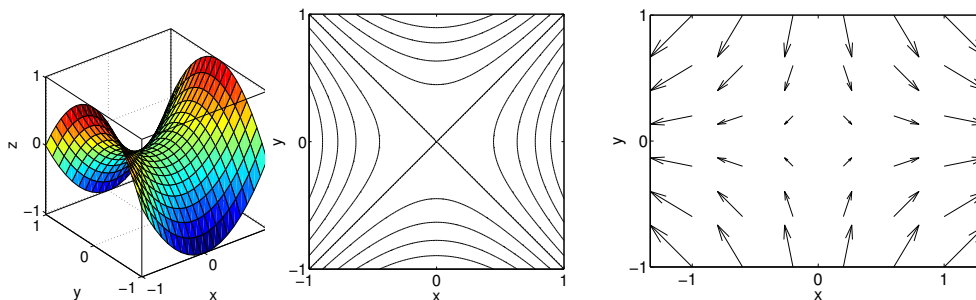
b) Jos $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva ja $\mathbf{r}(t)$ on tasa-arvojoukon $f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$ sileä käyrä, niin

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

kaikilla t . Geometrisesti: gradientti on kohtisuorassa tasa-arvopintaa vastaan.

Todistus. Koska $f(\mathbf{r}(t)) = c = \text{vakio}$, niin $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = 0$ kaikilla t . Väite seuraa nyt ketjusäännöstä (1.133). \square

Kohdan **a** tilannetta havainnollistetaan seuraavissa kuvissa, joihin on piirretty funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ kuvaaja, tasa-arvokäyriä ja gradienttikenttä: gradienttinuolet ovat kohtisuorassa tasa-arvokäyriä vastaan ja osoittavat nopeimman kasvun suuntaan.



Lauseen geometrisissa tulkinnoissa on huomattava, että tasa-arvojoukko $f^{-1}(c)$ ei välttämättä ole sileä käyrä tai pinta, vaan se voi ääritapauksessa (jos f on vakiofunktio $f = c$) olla esimerkiksi koko avaruus \mathbb{R}^2 tai \mathbb{R}^3 .

Esimerkki 1.140. Laske ellipsin $x^2 - xy + y^2 = 7$ pisteeseen $(-1, 2)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.

Ratkaisu. Tulkitaan ellipsi funktion $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ tasa-arvokäyräksi $f(x, y) = 7$. Nyt $\nabla f(x, y) = (2x - y, 2y - x)$, joten tasa-arvokäyrän ja siten kysytyn tangenttisuoran eräs normaalivektori on $\mathbf{n} = \nabla f(-1, 2) = (-4, 5)$. Tangenttisuoran yhtälö on siis (merkitään $\mathbf{x} = (x, y)$)

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ -4(x + 1) + 5(y - 2) &= 0 \\ 4x - 5y &= -14\end{aligned}$$

Esimerkki 1.141. Laske pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ pisteeseen $(1, -1, 2)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

Ratkaisu. Tulkitaan pallo funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ tasa-arvopinnaksi $f(x, y, z) = 6$. Nyt $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, joten tasa-arvopinnan ja siten kysytyn tangenttitason eräs normaalivektori on $\mathbf{n} = \nabla f(1, -1, 2) = (2, -2, 4)$. Tangenttitason yhtälö on siis (merkitään $\mathbf{x} = (x, y, z)$)

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ 2(x - 1) - 2(y + 1) + 4(z - 2) &= 0 \\ x - y + 2z &= 6\end{aligned}$$

1.9 Sidotut ääriarvot ja Lagrangen menetelmä

Sidotulla ääriarvot tehtävällä (constrained optimization problem) tarkoitetaan tehtävää, jossa ongelmana on etsiä funktion f ääriarvot jossakin määrittelyjoukon osajoukossa $A \subset \mathbb{R}^n$. Tapauksessa $n = 2$ joukkona A on tyypillisesti tarkastelujoukon reunakäyrä ja tapauksessa $n = 3$ reunapinta, kuten luvun 1.5.2 ääriarvot tehtävissä, joissa osana tehtävää on selvittää funktion ääriarvot tutkittavan joukon reunalla.

Kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ ääriarvoja käyrällä C voidaan yrittää selvittää mm. seuraavilla tavoilla (jos suurempaa keinoa ei keksitä):

- (1) Haetaan käyrälle C parametrusointi $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, jolloin tehtäväksi jää reaalifunktion $f(\mathbf{r}(t))$ ääriarvojen hakeminen välillä $[a, b]$.
- (2) Ratkaistaan käyrän koordinaattimuodosta $g(x, y) = 0$ jompi kumpi muuttuja toisen suhteen, esimerkiksi $y = y(x)$ ja sijoitetaan tutkittavaan funktioon: $f(x, y) = f(x, y(x)) =: g(x)$. Tutkittavaksi jää yhden muuttujan funktio $g(x)$.
- (3) Voidaan käyttää seuraavaa Lagrangen menetelmää.

Lause 1.142. *Olkoott funktiot f ja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia. Jos funktiolla f on joukossa*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

lokaali ääriarvo pisteessä (x_0, y_0) ja $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, niin jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Ehtoa $g(x, y) = 0$ kutsutaan *side-ehdoksi* tai *rajoitteeksi (constraint, side condition)*.

Todistus. Koska $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, niin tasa-arvojoukko $g(x, y) = 0$ on sileä käyrä pisteen (x_0, y_0) lähellä. Tätä tulosta kutsutaan *implisiittifunktio-lauseeksi*, jonka todistus sivuutetaan. Olkoon $\mathbf{r}(t)$ ko. käyrän parametrusointi siten, että $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0)$. Koska piste (x_0, y_0) on f :n ääriarvokohta ko. käyrällä, niin $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t_0)) = 0$. Ottamalla huomioon ketjusääntö (1.133) saadaan

$$\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0. \quad (1.143)$$

Toisaalta lauseen 1.139 mukaan

$$\nabla g(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0. \quad (1.144)$$

Yhtälöiden (1.143) ja (1.144) mukaan \mathbb{R}^2 :n vektorit $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ ja $\nabla g(\mathbf{r}(t_0))$ ovat kohtisuorassa tangenttivektoria $\mathbf{r}'(t)$ vastaan, joten niiden täytyy olla yhdensuuntaiset. Koska $\nabla g(\mathbf{r}(t_0)) \neq (0, 0)$, niin löytyy kerroin λ siten, että $\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) = \lambda \nabla g(\mathbf{r}(t_0))$. \square

Lause 1.142 antaa seuraavan menetelmän:

Lause 1.145 (Lagrangen menetelmä funktiolle $f(x, y)$, 1 side-ehto). *Olkoot funktiot f ja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia. Funktion $f(x, y)$ lokaalit ääriarvopisteet joukossa $g(x, y) = 0$ löytyvät yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ D_x f(x, y) = \lambda D_x g(x, y) \\ D_y f(x, y) = \lambda D_y g(x, y) \end{cases}$$

*ratkaisuina **tai** ne ovat pisteitä (x, y) , joille $g(x, y) = 0$ ja $\nabla g(x, y) = (0, 0)$.*

Kyseessä on kolmen muuttujan x, y ja λ yhtälöryhmä. Muuttujan λ (ns. *Lagrangen kertoja*, *Lagrange multiplier*) arvosta ei olla yleensä kiinnostuneita, joten monesti yhtälöryhmä ratkaistaan eliminoimalla λ jossakin ratkaisuprosessin vaiheessa.

Esimerkki 1.146. Hae funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ ääriarvot ympyrällä $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ käyttäen Lagrangen menetelmää. Vertaa esimerkkiin 1.70, missä osana tehtävää ratkaistiin sama ongelma kahdella eri tavalla.

Ratkaisu. Ympyrä voidaan esittää tasa-arvokäyränä $g(x, y) = 0$, missä $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Nyt $\nabla f = (2x - 1, 4y)$ ja $\nabla g = (2x, 2y)$, joten Lagrangen menetelmän yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - 1 = \lambda 2x \\ 4y = \lambda 2y \Leftrightarrow y = 0 \text{ tai } \lambda = 2 \end{cases}$$

Jos $y = 0$, niin ylin yhtälö antaa ratkaisut $x = \pm 1$ (ja kummassakin tapauksessa löytyy λ siten, että keskimmäinenkin yhtälö ratkeaa). Saadaan ääriarvokandidaatit $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$. Jos taas $\lambda = 2$, niin keskimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan $x = -1/2$ ja edelleen ylimmästä $y = \pm\sqrt{3}/2$. Saadaan ääriarvopistekandidaatit $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ ja $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Funktion arvot näissä pisteissä ovat $f(\pm 1, 0) = 0$ ja $f(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = 9/4$.

∇g :n ainoa nollakohta $(x, y) = (0, 0)$ ei ole tutkittavalla käyrällä.

Vastaus. $\min_C f = 0$ ja $\max_C f = 9/4$.

Lause 1.145 yleistyy n :n muuttujan funktiolle $f(\mathbf{x})$:

Lause 1.147 (Lagrangen menetelmä n :n muuttujan funktiolle, 1 side-ehto).
Olkoot funktiot f ja $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia. Funktion $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ lokaalit ääriarvopisteet joukossa $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \dots, x_n) = 0$ löytyvät yhtälöryhmän

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ D_1 f(\mathbf{x}) = \lambda D_1 g(\mathbf{x}) \\ D_2 f(\mathbf{x}) = \lambda D_2 g(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ D_n f(\mathbf{x}) = \lambda D_n g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

ratkaisuina **tai** ne ovat pisteitä \mathbf{x} , joille $g(\mathbf{x}) = 0$ ja $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Todistuksen idea \mathbb{R}^3 :ssa. Olkoon f :llä lokaali ääriarvo tasa-arvojoukon $g(x, y, z) = 0$ pisteessä (x_0, y_0, z_0) . Jos $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, niin tasa-arvojoukko $g(x, y, z) = 0$ on sileä pinta pisteen (x_0, y_0, z_0) lähellä. Nähdään – samaan tapaan kuin lauseen 1.142 todistuksessa – että $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ovat kohtisuorassa jokaista sellaista pinnan $g(x, y, z) = 0$ käyrää vastaan pisteessä (x_0, y_0, z_0) , joka kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta. Niinpä vektoreiden $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ täytyy olla yhdensuuntaiset. \square

Esimerkki 1.148. Mikä pinnan $x^2 - z^2 = 1$ piste on lähinnä origoa?

Ratkaisu. Pinta on tasa-arvopinta $g(x, y, z) = 0$, missä $g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$. Otetaan minimoitavaksi funktioksi etäisyyden neliö $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Kyseisellä pinnalla f :llä ei ole maksimia ja minimi löytyy Lagrangen menetelmällä. Nyt $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ ja $\nabla g = (2x, 0, -2z)$, joten Lagrangen menetelmän yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ 2x = \lambda 2x & \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } \lambda = 1 \\ 2y = 0 & \Leftrightarrow y = 0 \\ 2z = -\lambda 2z & \Leftrightarrow z = 0 \text{ tai } \lambda = -1 \end{cases}$$

Jos yhtälöryhmällä on ratkaisuja, niin toisen yhtälön mukaan $x = 0$ tai $\lambda = 1$. Tutkitaan nämä kaksi vaihtoehtoa: Jos $x = 0$, niin ylin yhtälö ei toteudu millään z , joten tällaisia ratkaisuja ei ole. Jos $\lambda = 1$, niin alimmasta yhtälöstä seuraa $z = 0$ ja siten ylimmästä $x = \pm 1$. Koska lisäksi kolmannen yhtälön mukaan $y = 0$, niin saadaan ääriarvopistekandidaatit $(-1, 0, 0)$ ja $(1, 0, 0)$. Funktion arvot näissä pisteissä ovat $f(\pm 1, 0, 0) = 1$, eli etäisyys on $\sqrt{1} = 1$.

∇g :n nollakohtien muodostama joukko (tasojen $x = 0$ ja $z = 0$ leikkaus eli y -akseli) ei ole tutkittavalla pinnalla.

Vastaus. Origoa lähinnä ovat pinnan pisteet $(-1, 0, 0)$ ja $(1, 0, 0)$, molemmat etäisyydellä 1.

Vastaus voitaisiin päätellä myös geometrisesti hahmottelemalla kyseinen hyperbelipinta $z = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ xyz -avaruuteen.

Lagrangen menetelmä voidaan edelleen yleistää useammalle side-ehdolle. Tällöin voidaan esimerkiksi tutkia funktion ääriarvoja kahden pinnan $g(x, y, z) = 0$ ja $h(x, y, z) = 0$ leikkauskäyrällä.

Lause 1.149. *Olkoot funktiot f, g ja $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia. Jos funktiolla f on joukossa*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0 \text{ ja } h(x, y, z) = 0\}$$

lokaali ääriarvo pisteessä (x_0, y_0, z_0) ja $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ ovat lineaarisesti riippumattomat, niin joillekin λ ja $\mu \in \mathbb{R}$ pätee:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Muistetaan, että vektorit ∇g ja ∇h ovat lineaarisesti riippumattomat jos ja vain jos $\nabla g \neq \mathbf{0}$, $\nabla h \neq \mathbf{0}$ ja ∇g ja ∇h eivät ole yhdensuuntaiset (ts. $\nabla g \times \nabla h \neq \mathbf{0}$).

Todistuksen idea. Olkoon f :llä lokaali ääriarvo joukon C pisteessä (x_0, y_0, z_0) . Jos $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ ja $\nabla h(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, niin tasa-arvojoukot $g(x, y, z) = 0$ ja $h(x, y, z) = 0$ ovat sileitä pintoja pisteen (x_0, y_0, z_0) lähellä. Koska näiden pintojen normaalivektorit $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ eivät ole yhdensuuntaiset, niin pintojen leikkausjoukko C on sileä käyrä pisteen (x_0, y_0, z_0) lähellä. Nähdään – samaan tapaan kuin lauseen 1.142 todistuksessa – että vektorit $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ ovat kohtisuorassa käyrää C vastaan pisteessä (x_0, y_0, z_0) . Niinpä nämä vektorit sijaitsevat samalla tasolla. Lineaarista riippumattomuudesta seuraa, että $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ja $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ virittävät ko. tason, joten $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ on niiden lineaarikombinaatio. \square

Menetelmäksi muotoiltuna:

Lause 1.150 (Lagrangen menetelmä funktiolle $f(x, y, z)$, 2 side-ehtoa).
 Olkoot funktiot f, g ja $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia. Funktion $f(x, y, z)$ lokaalit ääriarvopisteet side-ehtojen $g(x, y, z) = 0$ ja $h(x, y, z) = 0$ määräämässä joukossa löytyvät yhtälöryhmän

$$\begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ D_x f = \lambda D_x g + \mu D_x h \\ D_y f = \lambda D_y g + \mu D_y h \\ D_z f = \lambda D_z g + \mu D_z h \end{cases}$$

ratkaisuina **tai** ne ovat pisteitä (x, y, z) , joille $g(x, y, z) = 0$ ja $h(x, y, z) = 0$ sekä $\nabla g(x, y, z)$ ja $\nabla h(x, y, z)$ ovat lineaarisesti riippuvia.

Yleinen n :n muuttujan ja k :n side-ehdon menetelmä muotoillaan kurssikirjassa [7] lauseessa 13.9.3.

1.10 Taylorin kaava

Kerrataan aluksi reaali funktion approksimointia polynomeilla opintojaksolta Insinöörimatematiikka 3u. Jos funktiolla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva $(m+1)$:sen kertaluvun derivaatta $f^{(m+1)}$ jossakin pisteen a ympäristössä, niin pätee *Taylorin kaava*

$$\begin{aligned} f(a+h) = & f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 \\ & + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}h^m + \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!}h^{m+1}, \end{aligned} \quad (1.151)$$

missä z on a :n ja $(a+h)$:n välissä. Merkitsemällä $x = a+h$ saadaan

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 \\ & + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}. \end{aligned}$$

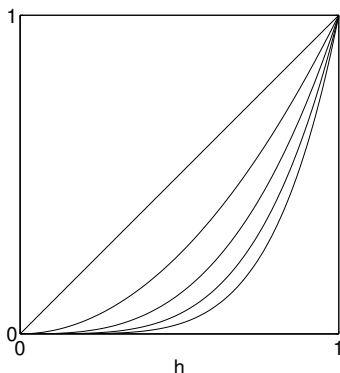
Funktiota f voidaan siis approksimoida *Taylorin polynomilla*

$$P_m(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

siten, että virhe on muotoa

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} = \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!}h \cdot h^m =: \epsilon_m(h)h^m,$$

missä $\epsilon_m(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$, sillä $(m+1)$. derivaatta on jatkuvana funktiona rajoitettu a :n lähellä. Verrataan tätä lineaarisen ensimmäisen asteen arvion virheeseen $\epsilon(h)h$. Seuraavaan kuvaan on piirretty funktioiden h^m , $m = 1, 2, 3, 4, 5$, kuvaajat välillä $h \in [0, 1]$.



Huomataan, että pienillä h ($|h| \ll 1$) tekijä h^m ja siten myös virhe $\epsilon_m(h)h^m$ pienenee oleellisesti m :n kasvaessa, jos $\epsilon_m(h)$ pysyy kurissa (kuten monissa sovelluksissa käy). Siten tarkkuus paranee, kun otetaan käyttöön Taylorin polynomin korkeampiasteisia termejä.

Kahden muuttujan funktion differentioituvuuden määritelmän antamaa lineaarista arviota voidaan samalla tavoin parantaa käyttämällä korkeampia osittaisderivaattoja:

Lause 1.152 (m :nnen asteen Taylorin kaava kahden muuttujan funktiolle).
Olkoot funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki $(m+1)$:sen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia pisteen $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ympäristössä. Tällöin

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) + \epsilon(h, k) \|(h, k)\|^m,$$

missä $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Tässä lauseke $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f$ lasketaan esimerkiksi Pascalin kolmion avulla:

$$\begin{aligned} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^0 f &= f \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 f &= h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f \\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f &= h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \end{aligned}$$

Erityisesti toisen asteen arvio ($m = 2$) tulee muotoon

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) \\ &+ \epsilon(h, k)\|(h, k)\|^2. \end{aligned} \tag{1.153}$$

Merkitään lauseessa 1.152 $x = a + h$ ja $y = b + k$. Taylorin kaavan polynomia

$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

kutsutaan funktion $f(x, y)$ m :nnen asteen Taylorin polynomiksi ja arviota $f(x, y) \approx P_m(x, y)$ funktion f m :nnen asteen polynomiapproksimaatioksi pisteen (a, b) suhteen.

Lauseen 1.152 perustelu tapauksessa $m = 2$. Parametrisoidaan pisteiden (a, b) ja $(a+h, b+k)$ välinen jana (ks. sivun 42 kuva): $\mathbf{r}(t) = (a+th, b+tk)$, $0 \leq t \leq 1$. Määritellään funktio $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Nyt $\mathbf{r}'(t) = (h, k)$, joten ketjusäännön (1.133) mukaan

$$\begin{aligned} F'(t) &= \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \right) \cdot (h, k) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))h + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))k. \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))$ on yhdiste funktioista $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ja $\mathbf{r}(t)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))$ on yhdiste funktioista $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ja $\mathbf{r}(t)$, joten derivoimalla $F'(t)$:tä toiseen kertaan saadaan ketjusääntöä (1.133) soveltamalla

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)) \right) h + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \right) k \\ &= \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)) \right) \cdot \mathbf{r}'(t)h + \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \right) \cdot \mathbf{r}'(t)k \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t)), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{r}(t)) \right) \cdot (h, k)h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}(t)), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t)) \right) \cdot (h, k)k \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t))h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{r}(t))kh + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}(t))hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t))k^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t))h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}(t))hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t))k^2. \end{aligned}$$

Sovelletaan nyt yhden muuttujan Taylorin kaavaa (1.151) funktioon F pisteessä $a = 0$ arvolla $h = 1$ ja jätetään merkintöjen lyhentämiseksi piste $\mathbf{r}(t)$ merkitsemättä:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(z)}{3!} \\ &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 \right) + \frac{F'''(z)}{3!}. \end{aligned}$$

Laskemalla $F'''(t)$ voidaan osoittaa, että virhetermi on muotoa $F'''(z)/3! = \epsilon(h, k)\|(h, k)\|^2$. □

Esimerkki 1.154. Laske funktion $f(x, y) = e^{xy}$ 1.–3. asteen Taylorin polynomit pisteen $(0, 2)$ suhteen ja approksimoi niillä arvoa $f(0, 2, 1, 9)$.

Ratkaisu. $f(0, 2) = 1$ ja osittaisderivaatat pisteessä $(x, y) = (0, 2)$ ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy} = 0 \end{aligned}$$

joten 1. kertaluvun Taylorin polynomi eli linearisointi on

$$P_1(x, y) = 1 + 2(x - 0) + 0(y - 2) = 1 + 2x.$$

Toisen kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $(x, y) = (0, 2)$ ovat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 + xy)e^{xy} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} = 0$$

joten

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= P_1(x, y) + \frac{1}{2} (4(x-0)^2 + 2(x-0)(y-2) + 0(y-2)^2) \\ &= 1 + 2x^2 + xy. \end{aligned}$$

Kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $(x, y) = (0, 2)$ ovat

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y^3 e^{xy} = 8 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = (x^2 y + 2x)e^{xy} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (xy^2 + 2y)e^{xy} = 4 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^3 e^{xy} = 0$$

joten

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= P_2(x, y) + \frac{1}{6} (8(x-0)^3 + 12(x-0)^2(y-2) \\ &\quad + 0(x-0)(y-2)^2 + 0(y-2)^3) = 1 - 2x^2 + xy + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y. \end{aligned}$$

Polynomien antamat arviot ja vertailun vuoksi tarkka viisidesimaalinen likiarvo:

$$P_1(0, 2, 1, 9) = 1,40000$$

$$P_2(0, 2, 1, 9) = 1,46000$$

$$P_3(0, 2, 1, 9) \approx 1,46267$$

$$f(0, 2, 1, 9) \approx 1,46228$$

Merkitsemällä arviossa (1.153)

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x D_x f(x, y) & D_x D_y f(x, y) \\ D_y D_x f(x, y) & D_y D_y f(x, y) \end{bmatrix}$$

voidaan toisen asteen sulkulauseke kirjoittaa lyhyesti

$$\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} Hf(a, b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

ja toisen asteen Taylorin kaava siten

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'(a, b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} Hf(a, b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \epsilon(h, k) \|(h, k)\|^2.$$

Tämä yleistyy n :n muuttujan funktioille:

Määritelmä 1.155. Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Hessian matriisi (Hessian matrix) pisteessä \mathbf{x} on

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Merkintää $D_i D_j f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ käyttäen voidaan kirjoittaa

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Huomautus 1.156. Jos funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin

$$Hf(\mathbf{x}) = Df'(\mathbf{x}).$$

Niinpä Hessian matriisi voidaan laskea Matlabissa komennolla

`jacobian(jacobian(f, [x, y, z]), [x, y, z])`

Lause 1.157 (Toisen asteen Taylorin kaava n :n muuttujan funktiolle). *Olkoot funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä. Tällöin*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T Hf(\mathbf{a})\mathbf{h} + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2,$$

missä $\epsilon(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Merkitään $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$. Toisen asteen Taylorin polynomi voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Esimerkki 1.158. Laske funktion $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteen $(2, 2, 1)$ suhteen.

Ratkaisu. Nyt

$$f'(x, y, z) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

ja $Hf(x, y, z) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix},$$

joten $f(2, 2, 1) = 3$,

$$f'(2, 2, 1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad Hf(2, 2, 1) = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Toisen asteen Taylorin polynomi pisteen $(2, 2, 1)$ suhteen on siten

$$\begin{aligned}
 P_2(x, y, z) &= 3 + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{27} [x-2 \quad y-2 \quad z-1] \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} \\
 &= 3 + \frac{2}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(y-2) + \frac{1}{3}(z-1) \\
 &\quad + \frac{1}{54} [x-2 \quad y-2 \quad z-1] \begin{bmatrix} 5x-4y-2z \\ -4x+5y-2z \\ -2x-2y+8z \end{bmatrix} \\
 &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{5}{54}x^2 - \frac{4}{27}xy - \frac{2}{27}xz + \frac{5}{54}y^2 - \frac{2}{27}yz + \frac{4}{27}z^2.
 \end{aligned}$$

Huomautus 1.159. a) Myös n :n muuttujan funktiolle on olemassa m :nnen asteen polynomiapproksimaatio.

b) Virhettä $\epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2$ voidaan arvioida kolmannen kertaluvun osittaisderivaattojen avulla. Sivuuutetaan tällä opintojaksolla.

c) Osittaisderivoinnin vaihtosäännön nojalla $Hf(\mathbf{a})$ on symmetrinen ja siten $\mathbf{h}^T Hf(\mathbf{a})\mathbf{h}$ on muuttujan \mathbf{h} neliömuoto.

1.11 Lokaalien ääriarvojen laatu

Aiemmin todettiin, että differentioituvan funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ääriarvopisteet löytyvät kriittisten pisteiden joukosta. Haetaan menetelmä kriittisen pisteen laadun (maksimipiste, minimipiste vai satulapiste) selvittämiseksi. Kerataan ensin neliömuodon käyttäytymisen yhteys ominaisarvoihin kurssilta Insinöörimatematiikka 2u (ks. [16], lause 5.24).

Lause 1.160. *Olkoon $A_{n \times n}$ symmetrinen matriisi. Vastaavalle neliömuodolle $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ pätee:*

- $f(\mathbf{x}) > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ts. f on positiivisesti definiitti)
 $\Leftrightarrow A$:n ominaisarvot ovat positiivisia,
- $f(\mathbf{x}) < 0$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ts. f on negatiivisesti definiitti)
 $\Leftrightarrow A$:n ominaisarvot ovat negatiivisia,
- f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja (ts. f on indefiniitti)
 $\Leftrightarrow A$:lla on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja.

Lause 1.161. *Olkoot funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia kriittisen pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä.*

- *Jos $Hf(\mathbf{a})$:n kaikki ominaisarvot ovat positiivisia, niin \mathbf{a} on lokaali minimipiste.*
- *Jos $Hf(\mathbf{a})$:n kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia, niin \mathbf{a} on lokaali maksimipiste.*
- *Jos $Hf(\mathbf{a})$:lla on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja, niin \mathbf{a} on satulapiste.*

Semidefiniiteissä tapauksissa (jokin ominaisarvo on nolla ja muut ei-negatiivisia tai ei-positiivisia) kriittisen pisteen laatu jää avoimeksi.

Perustelu. \mathbf{a} on kriittinen piste, eli $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, joten lauseen 1.157 mukaan

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}g(\mathbf{h}), \quad \text{missä } g(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T Hf(\mathbf{a})\mathbf{h},$$

kun $\|\mathbf{h}\|$ on pieni. Tässä merkintä \approx tarkoittaa, että virhetermi $\epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2$ on oletettu nolaksi ja unohdettu (tämän tarkempi pohdinta sivuutetaan, ks. esim. [3, Thm 9.6]). $g(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T Hf(\mathbf{a})\mathbf{h}$ on muuttujan \mathbf{h} neliömuoto, jonka matriisi on $Hf(\mathbf{a})$.

Jos $Hf(\mathbf{a})$:n kaikki ominaisarvot ovat positiivisia, niin lauseen 1.160 mukaan $g(\mathbf{h}) > 0$ kaikilla $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Siten $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \gtrsim f(\mathbf{a})$ kaikilla $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, kun $\|\mathbf{h}\|$ on pieni, joten \mathbf{a} on f :n lokaali minimipiste.

Negatiivisten ja erimerkkisten ominaisarvojen tapaukset vastaavasti. \square

Lausetta 1.161 käytettäessä on selvitettävä Hessen matriisin ominaisarvot. Lauseen avulla voidaan johtaa seuraavat determinanttikeinot kahden muuttujan funktioille (lause 1.162) ja yleisesti n :n muuttujan funktiolle (lause 1.164), joita käytettäessä vältetään ominaisarvojen laskemiselta.

Lause 1.162. Olkoot funktion $f(x, y)$ kaikki kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia kriittisen pisteen (a, b) ympäristössä. Merkitään $A = D_x D_x f(a, b)$, $B = D_x D_y f(a, b) = D_y D_x f(a, b)$ ja $C = D_y D_y f(a, b)$ sekä

$$\Delta = \det(Hf(a, b)) = AC - B^2.$$

Tällöin

- $f(a, b)$ on lokaali minimi, jos $A > 0$ ja $\Delta > 0$,
- $f(a, b)$ on lokaali maksimi, jos $A < 0$ ja $\Delta > 0$,
- (a, b) on satulapiste, jos $\Delta < 0$.

Tapauksessa $\Delta = 0$ mikä tahansa em. vaihtoehdoista voi toteutua.

Todistus. Hessen matriisiin

$$Hf(a, b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

karakteristinen yhtälö on

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + \Delta = 0.$$

Ominaisarvot ovat siten

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4\Delta}}{2}.$$

$Hf(a, b)$ on symmetrinen matriisi, joten ominaisarvot ovat reaalisia ja siten $(A + C)^2 - 4\Delta \geq 0$. Tarkastellaan tapaukset $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ja $\Delta = 0$.

(1) $\Delta > 0$: Täytyy olla $AC > 0$, joten A ja C ovat samanmerkkisiä. Lisäksi

$$\sqrt{(A + C)^2 - 4\Delta} < \sqrt{(A + C)^2} = |A + C|.$$

Siten jos $A > 0$, niin $C > 0$ ja ominaisarvot ovat positiivisia, jolloin lauseen 1.161 mukaan (a, b) on lokaali minimipiste. Jos taas $A < 0$, niin $C < 0$ ja ominaisarvot ovat negatiivisia, jolloin lauseen 1.161 mukaan (a, b) on lokaali maksimipiste.

(2) $\Delta < 0$:

$$\sqrt{(A + C)^2 - 4\Delta} > \sqrt{(A + C)^2} = |A + C|,$$

joten ominaisarvot ovat erimerkkiset, jolloin lauseen 1.161 mukaan (a, b) on satulapiste.

(3) $\Delta = 0$: Tarkastellaan funktioita $f(x, y) = x^4 + y^4$, $g(x, y) = -x^4 - y^4$ ja $h(x, y) = x^4 - y^4$ pisteessä $(a, b) = (0, 0)$. Näille kaikille $\Delta = 0$ ja f :llä on origossa lokaali minimi, g :llä lokaali maksimi ja h :lla satulapiste. \square

Esimerkki 1.163. Etsi ja luokittele funktion $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ kriittiset pisteet.

Ratkaisu. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0 & \Leftrightarrow x^2 = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0 & \Leftrightarrow x = y \end{cases}$$

Täytyy olla $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 1$, joten kriittiset pisteet ovat $(0, 0)$ ja $(1, 1)$. Lauseen 1.162 merkinnöin $A = D_x D_x f = 12x$, $B = D_y D_x f = -6$ ja $C = D_y D_y f = 6$, joten $\Delta = 72x - 36$.

Kp	A	Δ	Laatu
$(0, 0)$	0	$-36 < 0$	satulapiste
$(1, 1)$	$12 > 0$	$36 > 0$	lokaali minimipiste

Olkoon $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ -matriisi. Merkitään A :n vasemman yläkulman alideterminantteja seuraavasti:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = |A|.$$

Lause 1.164. Olkoot funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaikki kolmannen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia kriittisen pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä. Olkoot Δ_k :t Hessen matriisin $Hf(\mathbf{a})$ alideterminantteja ja oletetaan, että $\Delta_n \neq 0$. Tällöin

- $f(\mathbf{a})$ on lokaali minimi, jos $\Delta_k > 0$ jokaisella $k = 1, 2, \dots, n$,
- $f(\mathbf{a})$ on lokaali maksimi, jos $(-1)^k \Delta_k > 0$ jokaisella $k = 1, 2, \dots, n$ (ts. Δ_k :lla on merkit $-, +, -, \dots$).
- Muutoin \mathbf{a} on satulapiste.

Tapauksessa $\Delta_n = 0$ mikä tahansa em. vaihtoehdoista voi toteutua.

Esimerkki 1.165. Osoita, että $(0, 0, 0)$ on funktion $f(x, y, z) = xz + 2yz - 3x^2 - 4y^2 - 5z^2$ kriittinen piste ja selvitä, onko $(0, 0, 0)$ lokaali minimipiste, lokaali maksimipiste vai satulapiste.

Ratkaisu. Koska

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z - 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2z - 8y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2y - 10z,$$

niin kaikki osittaisderivaatat häviävät origossa, joten se on kriittinen piste. Lisäksi

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix},$$

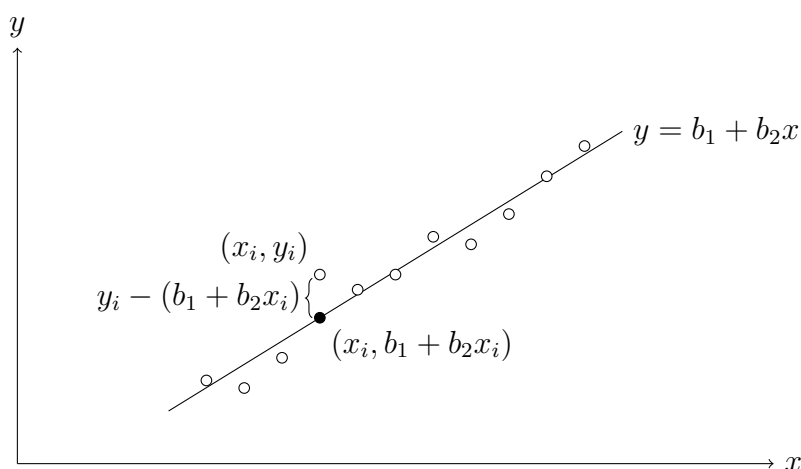
joten $\Delta_1 = -6 < 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 48 > 0 \quad \text{ja} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & -10 \end{vmatrix} = -448 < 0.$$

Niinpä $(0, 0, 0)$ on lauseen 1.164 mukaan lokaali maksimipiste.

1.12 Pienimmän neliösumman menetelmä

Oletetaan, että jonkin suureen y riippuvuus suureesta x on muotoa $y = b_1 + b_2x$. Vakion b_1 ja kulmakertoimen b_2 selvittämiseksi mitataan y muutamilla x :n arvoilla. Merkitään näitä mittaustuloksia (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Miten b_1 ja b_2 olisi valittava, jotta suora sopisi datapisteisiin mahdollisimman hyvin?



Tähän ei ole yksikäsitteistä vastausta. Voitaisiin esimerkiksi minimoida virheiden itseisarvojen summa

$$|y_1 - (b_1 + b_2x_1)| + |y_2 - (b_1 + b_2x_2)| + \dots + |y_n - (b_1 + b_2x_n)|.$$

Tämän ei-differentioituvan muuttujien b_1 ja b_2 funktion käsittely on kuitenkin vaikeaa eikä ratkaisu ole edes yksikäsitteinen. Parempi lähtökohta on

minimoida virheiden neliösumma

$$\begin{aligned} f(b_1, b_2) &= (y_1 - (b_1 + b_2x_1))^2 + (y_2 - (b_1 + b_2x_2))^2 + \cdots + (y_n - (b_1 + b_2x_n))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - (b_1 + b_2x_i))^2. \end{aligned}$$

Funktion $f(b_1, b_2)$ minimi löytyy kriittisestä pisteestä. Suorittamalla osittaisderivoinnit nähdään, että

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial b_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)b_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ nb_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b_2 = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (1.166)$$

Kriittinen piste (b_1, b_2) voidaan ratkaista tästä lineaarisesta yhtälöparista. Yleensä yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu, joka antaa haetut b_1 :n ja b_2 :n arvot.

Yleisemmin: halutaan sovittaa datapisteisiin polynomi $y = b_1 + b_2x + \cdots + b_mx^{m-1}$. Merkitään

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriisia A kutsutaan *Vandermonden matriisiksi*. Nyt minimoitava neliösumma on $f(\mathbf{b}) = \|\mathbf{y} - A\mathbf{b}\|^2$.

Lemma 1.167. *Funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ derivaattamatriisi on $g'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T$, kun kirjoitetaan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pystyvektorina.*

Funktion f sisäfunktion $\mathbf{y} - A\mathbf{b}$ derivaattamatriisi on $-A$, joten lemmän 1.167 ja ketjusäännön mukaan

$$f'(\mathbf{b}) = -2(\mathbf{y} - A\mathbf{b})^T A.$$

Haetaan kriittinen piste:

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow (\mathbf{y} - A\mathbf{b})^T A &= \mathbf{0} && |(\cdot)^T \\ \Leftrightarrow A^T(\mathbf{y} - A\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow A^T A\mathbf{b} &= A^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

Jos $A^T A$ on kääntövä, niin saadaan yksikäsitteinen ratkaisu

$$\mathbf{b} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}. \quad (1.168)$$

Menetelmää on mahdollista soveltaa myös yleisemmille funktioille y kuin polynomeille.

Esimerkki 1.169. Sovita PNS-suora datapisteisiin

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2,10	1,92	1,84	1,71	1,64

Ratkaisu. Tapa 1. Käytetään yhtälöparia (1.166):

$$\begin{cases} 10b_1 + 30b_2 = 17,29 \\ 5b_1 + 10b_2 = 9,21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2,068 \\ b_2 = -0,113 \end{cases}$$

PNS-suora on $y = 2,068 - 0,113x$.

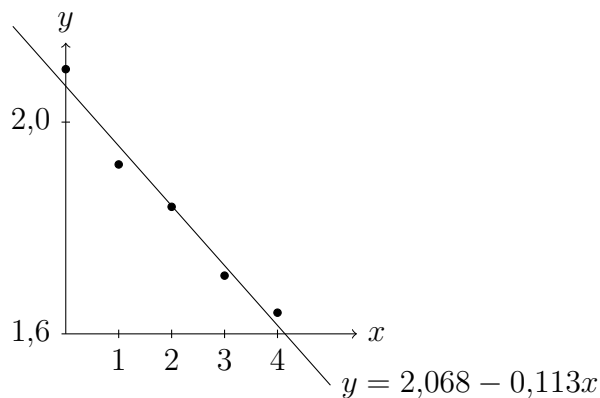
Tapa 2. Käytetään yhtälöä (1.168). Nyt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2,10 \\ 1,92 \\ 1,84 \\ 1,71 \\ 1,64 \end{bmatrix},$$

joten

$$A^T A \mathbf{b} = A^T \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9,21 \\ 17,29 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,068 \\ -0,113 \end{bmatrix}.$$

Siten PNS-suora on $y = 2,068 - 0,113x$.



Esimerkki 1.170. Sovita PNS-paraabeli $y = a + bx + cx^2$ pisteisiin $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ ja $(2, 2)$.

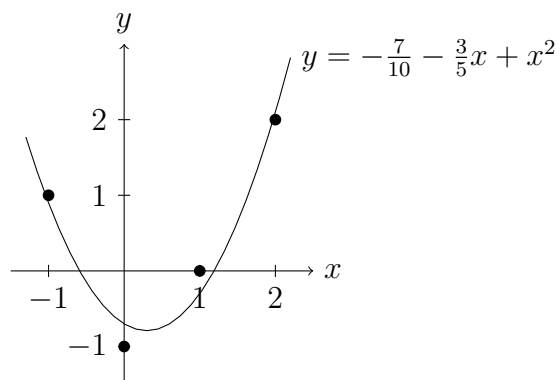
Ratkaisu. Nyt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

joten

$$A^T A \mathbf{b} = A^T \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7/10 \\ -3/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siten PNS-paraabeli on $y = -\frac{7}{10} - \frac{3}{5}x + x^2$.



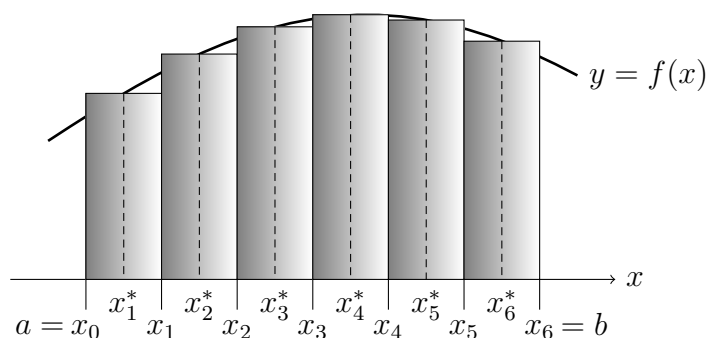
2 Taso- ja avaruusintegraali

2.1 Kertaus: reaalfunktion integraali

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin *jakopisteillä* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Jakopisteiden muodostamaa joukkoa $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ kutsutaan välin $[a, b]$ *jaoksi* (*partition*). Valitaan jokaiselta osaväliltä $[x_{i-1}, x_i]$ piste x_i^* ja merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ts. Δx_i on i :n osavälin pituus. *Jaon normiksi* $|P|$ sanotaan pisimmän osavälin pituutta, ts. $|P| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Summaa

$$R = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

kutsutaan jakoon P ja pisteisiin x_i^* liittyväksi *Riemannin summaksi*.



Jos $f(x) \geq 0$, niin Riemannin summan kukin termi on kuvan mukaisen suorakulmion pinta-ala, joten Riemannin summa antaa arvion funktion f kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän joukon pinta-alalle välillä $[a, b]$. Kuvassa on yksinkertaisuuden vuoksi valittu piste x_i^* välin keskipisteeksi ja osavälit yhtä pitkiä. Geometrisesti on ilmeistä, että arvio paranee, kun osavälijakoa tihennetään, ts. kun $|P| \rightarrow 0$. Tämä antaa motivaation integraalin määrittelymiseksi:

Määritelmä 2.1. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Jos raja-arvo

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

on olemassa, niin sanotaan, että f on *integroituva* (*integrable*) välillä $[a, b]$ ja luku I on funktion f *integraali* (*integral*) *yli välin* $[a, b]$. Tällöin merkitään

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f.$$

Geometrinen tulkinta määritelmälle on, että jos $f(x) \geq 0$ ja f on integroituva, niin luku

$$\int_a^b f(x) dx$$

on funktion f kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän joukon pinta-ala.

2.2 Tasointegraali suorakulmiossa

Yleistetään integraali \mathbb{R}^2 :n osajoukkoihin. Edellä integroimisjoukkona oli yksiulotteinen väli $[a, b]$, joka jaettiin yksiulotteisiin osaväleihin. Joukko $R \subset \mathbb{R}^2$ jaetaan vastaavasti kaksiulotteisiin osajoukkoihin. Aloitetaan yksinkertaisimmasta tapauksesta, jossa R on suorakulmio

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Jaetaan välit $[a, b]$ ja $[c, d]$ osaväleihin käyttäen jakopisteitä

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d.$$

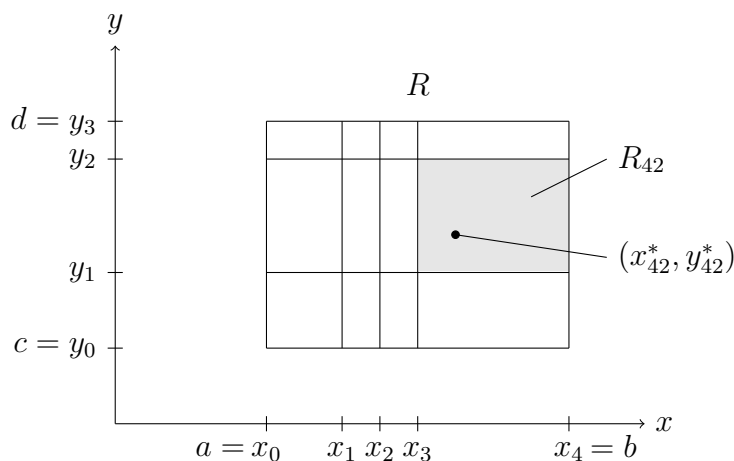
Nämä jaot jakavat suorakulmion R mn kappaleeseen osasuorakulmioita R_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Osasuorakulmioiden kulmapisteiden muodostamaa joukkoa

$$P = \{(x_i, y_j) : i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n\}$$

kutsutaan suorakulmion R *jaoksi* (*partition*). Merkitään osavälien pituuksia $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ja $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, jolloin osasuorakulmion R_{ij} pinta-ala on $\Delta x_i \Delta y_j$. *Jaon P normi $|P|$* on maksimi osasuorakulmioiden halkaisijoista, ts.

$$|P| = \max\{\text{diam}(R_{ij}) : i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{missä}$$

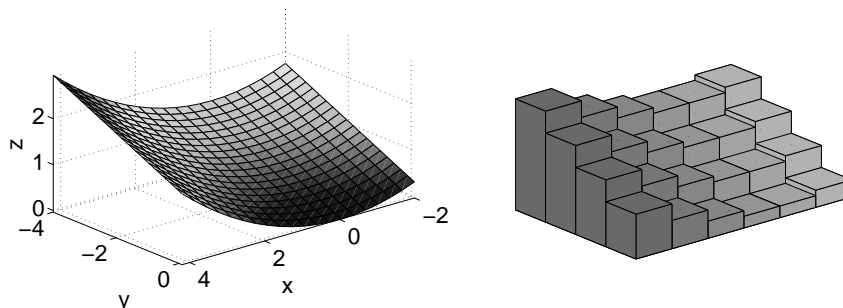
$$\text{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$



Valitaan lisäksi jokaisesta osasuorakulmiosta R_{ij} piste (x_{ij}^*, y_{ij}^*) . Jos $f(x, y)$ on suorakulmiossa R määritelty reaaliarvoinen funktio, niin summaa

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j \quad (2.2)$$

kutsutaan jakoon P ja pisteisiin (x_{ij}^*, y_{ij}^*) liittyväksi funktion f *Riemannin summaksi*. Jos $f(x, y) \geq 0$, niin Riemannin summan termi $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j$ on R_{ij} -pohjaisen $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ -korkuisen suorakulmaisen särmiön tilavuus. Riemannin summa antaa siten approksimaation f :n kuvaajan ja xy -tason väliin jäävän joukon tilavuudelle.



Geometrisesti on ilmeistä, että arvio paranee, kun osavälijakoa tihennetään, ts. kun $|P| \rightarrow 0$. Tämä antaa motivaation integraalin määrittelemiseksi:

Määritelmä 2.3. Olkoon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio suorakulmiossa $R = [a, b] \times [c, d]$. Jos raja-arvo

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

on olemassa, niin sanotaan, että f on *integroitava* (*integrable*) joukossa R ja luku I on funktion f *integraali* (*integral*) yli joukon R . Tällöin merkitään

$$I = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Määritelmän raja-arvo tarkoittaa tarkemmin ottaen seuraavaa: raja-arvo on I , jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left| I - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j \right| < \epsilon, \quad (2.4)$$

olipa P mikä tahansa joukon R jako ja (x_i^*, y_j^*) mitkä tahansa siihen liittyvät jakopisteet siten, että $|P| < \delta$.

Geometrinen tulkinta määritelmälle on, että jos $f(x, y) \geq 0$ ja f on integroitava, niin funktion f kuvaajan ja xy -tason väliin jäävän joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ tilavuus $v(T)$ on

$$v(T) = \iint_R f(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

Lause 2.6 (Fubinin lause, viipalointiperiaate). *Suorakulmiossa* $R = [a, b] \times [c, d]$ *jatkuva funktio* $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ *on integroitava ja*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Perustelu. Oletetaan, että $f(x, y) \geq 0$, jolloin kyseessä oleva integraali on f :n kuvaajan ja xy -tason välisen joukon T tilavuus:

$$v(T) = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Tarkastellaan integroimisjärjestystä

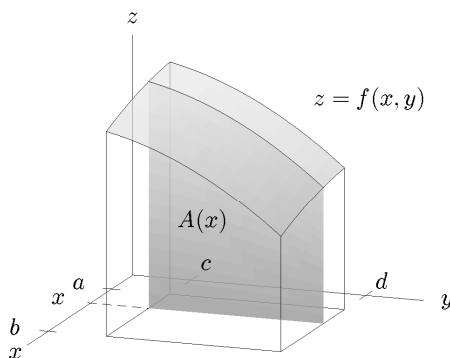
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \tag{2.7}$$

(toinen järjestys vastaavasti). Kun $x \in [a, b]$, niin (2.7):n sisempi integraali on reaaliluku. Voidaan siis määritellä funktio

$$A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

jolloin (2.7) tulee muotoon

$$\int_a^b A(x) dx.$$



Geometrisesti $A(x)$ on sen x -akselia vastaan kohtisuoran tason, joka leikkaa x -akselin pisteessä x , ja joukon T leikkausjoukon pinta-ala. Yksiulotteisen integraalin määritelmän 2.1 mukaan

$$\int_a^b A(x) dx \approx \sum_{i=1}^m A(x_i^*) \Delta x_i.$$

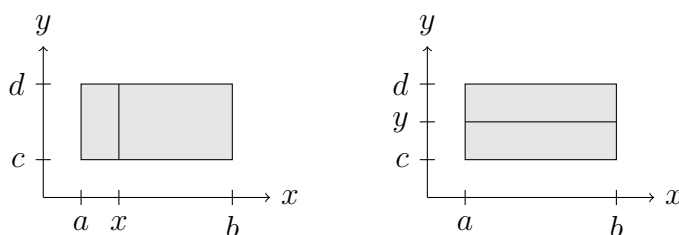
Tämän Riemannin summan termit voidaan tulkita niin, että kerrotaan T :n sen poikkileikkauksen (viipaleen), jossa $x = x_i^*$, pinta-ala $A(x_i^*)$ viipaleen paksuudella Δx_i . Summa siis approksimoi tilavuutta $v(T)$, ja rajalla $|P| \rightarrow 0$ saadaan

$$v(T) = \int_a^b A(x) dx. \quad \square$$

Tämän geometrisen tulkinnan vuoksi lauseen menetelmästä käytetään nimitystä *viipalointiperiaate*. Käytännössä: (2.7):ssa sisempänä integroidaan y :n suhteen pitäen x :ää vakiona ja sen jälkeen tämän integroinnin tulos integroidaan x :n suhteen. Tätä havainnollistetaan vasemmanpuoleisessa kuvassa. Vastaavalla tavoin voidaan käyttää päinvastaista järjestystä

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy,$$

ks. oikeanpuoleinen kuva.



Esimerkki 2.8. Olkoon $f(x, y) = x^2 + y$.

a) Arvioi integraalia

$$I = \iint_R (x^2 + y) dx dy$$

joukossa $R = [0, 1] \times [0, 2]$ Riemannin summalla jakamalla R kummassakin suunnassa kahteen osaan ja käyttämällä pisteinä (x_{ij}^*, y_{ij}^*) osasuorakulmioiden keskipisteitä.

b) Laske integraali I .

Ratkaisu. a) Kunkin osasuorakulmion pinta-ala on $\Delta x_i \Delta y_j = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, joten (piirrä kuva!)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j &= f(x_{11}^*, y_{11}^*) \Delta x_1 \Delta y_1 + f(x_{12}^*, y_{12}^*) \Delta x_1 \Delta y_2 \\ &\quad + f(x_{21}^*, y_{21}^*) \Delta x_2 \Delta y_1 + f(x_{22}^*, y_{22}^*) \Delta x_2 \Delta y_2 \\ &= f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2,625. \end{aligned}$$

b) Käytetään lausetta 2.6:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (x^2 y + \frac{1}{2} y^2) dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 + 2) dx = \int_0^1 (\frac{2}{3} x^3 + 2x) = \frac{8}{3} \approx 2,67. \end{aligned}$$

Kokeile myös integroimisjärjestystä

$$\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy.$$

Huomautus 2.9. Jos sisäkkäisillä integraaleilla on vakiorajat ja integroitava funktio voidaan separoida muotoon $f(x, y) = g(x)h(y)$, niin

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b g(x) \underbrace{\left(\int_c^d h(y) dy \right)}_{\text{vakio}} dx \\ &= \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right). \end{aligned}$$

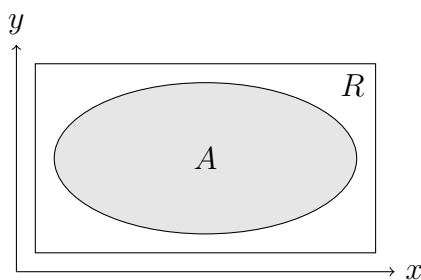
Tämä nopeuttaa usein laskemista.

Esimerkki 2.10.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 xy^2 dx dy &= \left(\int_0^2 x dx \right) \left(\int_0^1 y^2 dy \right) \\ &= \left(\int_0^2 \frac{x^2}{2} \right) \left(\int_0^1 \frac{y^3}{3} \right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2.3 Tasointegraali projisoituvissa joukoissa

Olkoon seuraavaksi $A \subset \mathbb{R}^2$ mikä tahansa rajoitettu joukko. Koska A on rajoitettu, niin se sisältyy johonkin suorakulmioon $R = [a, b] \times [c, d]$.



Jos $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on A :ssa määritelty reaaliarvoinen funktio, niin sen *nollajatko* joukkoon R on funktio $f^0: R \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f^0(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{jos } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{jos } (x, y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

Määritelmä 2.11. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $A \subset R = [a, b] \times [c, d]$. Rajoitettu funktio $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on *integroituva* joukossa A , jos f :n nollajatko f^0 on integroituva suorakulmiossa R , ja tällöin funktion f *integraali yli joukon* A on

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R f^0(x, y) \, dx \, dy.$$

Integraalille käytetään myös merkintöjä

$$\iint_A f(x, y) \, dA = \iint_A f \, dA = \iint_A f.$$

Esimerkki 2.12. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0, 1]\}$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$. A siis koostuu neliön $[0, 1] \times [0, 1]$ pystysuorista janoista, joilla x -koordinaatti on rationaalinen ja f on vakiofunktio 1. Valitaan $R = [0, 1] \times [0, 1] \supset A$ ja sille mikä tahansa jako. Jokainen osasuorakulmio R_{ij} sisältää nyt sekä A :n että A :n komplementin pisteitä, joten jokainen piste (x_{ij}^*, y_{ij}^*) voidaan valita siten, että $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in A$. Silloin $f^0(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = 1$ ja Riemannin summa on

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f^0(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_i \Delta y_j = 1.$$

Vastaavasti jokainen piste (x_{ij}^*, y_{ij}^*) voidaan valita siten, että $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \notin A$. Silloin $f^0(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = 0$ ja Riemannin summa on 0. Riemannin summilla ei siten voi olla raja-arvoa, kun $|P| \rightarrow 0$, eikä f ole integroituva.

Esimerkin 2.12 mukaan edes vakiofunktio 1 ei välttämättä ole integroituva. Integroituvuus riippuukin sekä funktion f että joukon A ominaisuuksista. Usein käytännön tilanteissa pärjätään seuraavalla tuloksella.

Lause 2.13. Jos suljetun ja rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ reuna koostuu äärellisen monesta paloittain sileästä käyrästä ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroituva.

Lauseissa 2.13–2.17 lueteltujen tasointegraalin perusominaisuuksien tarkka todistaminen vaatisi huomattavan paljon työtä. Tällä peruskurssilla tyydymme perustelevaan ominaisuuksia geometrisesti.

Esimerkki 2.14. Lasketaan

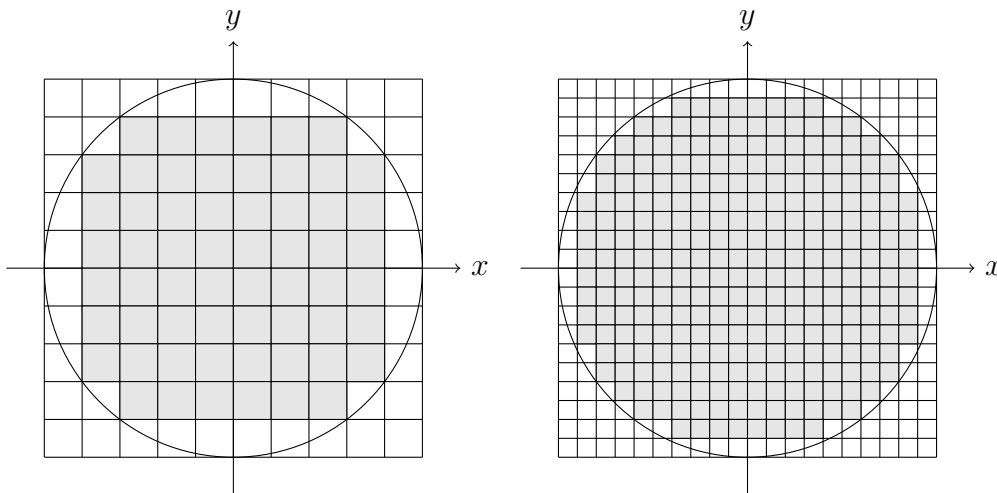
$$\iint_B 1 \, dx \, dy,$$

kun $B = \overline{B}((0,0), 1)$ (eli B on origokeskinen 1-säteinen suljettu kiekko). Nyt $f(x, y) = 1$. Valitaan $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \supset B$ ja jaetaan R tasavälisesti $n \times n$ osaneliöön R_{ij} . Jos $R_{ij} \not\subset B$, niin valitaan $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R \setminus B$. Silloin $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = 1$, jos R_{ij} on kokonaan kiekossa B ja $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = 0$ muulloin. Niinpä Riemannin summa on

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

on niiden neliöiden yhteenlaskettu pinta-ala, jotka ovat kokonaan kiekossa B . Mitä tiheämpi jako peittäväällä suorakulmiolla on, sitä tarkemmin kiekon sisäpuolelle jäävien osasuorakulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala approksimoi kiekon pinta-alaa. Summan raja-arvo lähenee siten kiekon pinta-alaa, kun $|P| \rightarrow 0$, eli

$$\iint_B 1 \, dx \, dy = \pi.$$



Esimerkin 2.14 idea voidaan yleistää, eli integraali voidaan laskea sellaisten Riemannin summien raja-arvona, joihin otetaan mukaan vain ne osasuorakulmiot, jotka ovat kokonaan joukossa A :

Lause 2.15. *Olkoot A , R ja f kuten määritelmässä 2.11 ja valitaan R :lle jaot kuten luvussa 2.2. Silloin f on integroitava jos ja vain jos seuraava raja-arvo on olemassa ja*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1 \\ R_{ij} \subset A}}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (2.16)$$

Lauseen 2.17 kohta (1) toteaa esimerkin 2.14 tuloksen pätevän yleisemmin. Kohdissa (2)–(3) yleistetään tilavuustulkinta (2.5). Kohdat (4)–(7) voidaan perustella samaan tapaan kuin yksiulotteiselle integraalille (ks. [12, lause 1.33]).

Lause 2.17 (Tasointegraalin ominaisuuksia). *Integroituville funktioille f ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^2$) pätee:*

- (1) $\iint_A 1 dx dy = a(A) =$ joukon A pinta-ala.
- (2) Jos $f(x, y) \geq 0$ joukossa A , niin joukon A ja funktion f kuvaajan väliin jäävän joukon T tilavuus on $v(T) = \iint_A f(x, y) dx dy$.
- (3) Jos $f(x, y) \leq 0$ joukossa A , niin joukon A ja funktion f kuvaajan väliin jäävän joukon T tilavuus on $v(T) = - \iint_A f(x, y) dx dy$.
- (4) $\iint_A cf(x, y) dx dy = c \iint_A f(x, y) dx dy$ ($c \in \mathbb{R}$).
- (5) $\iint_A (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_A g(x, y) dx dy$.
- (6) Jos $f(x, y) \leq g(x, y)$ kaikilla $(x, y) \in A$, niin

$$\iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy.$$

- (7) $\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy$.
- (8) Jos A jaetaan erillisiin osiin A_1 ja A_2 (ts. $A = A_1 \cup A_2$ ja $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) ja f on integroitava A_1 :ssa ja A_2 :ssa, niin

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A_1} f(x, y) dx dy + \iint_{A_2} f(x, y) dx dy.$$

Oletetaan, että rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ reuna koostuu äärellisen monesta paloittain sileästä käyrästä ja että f on integroitava A :ssa. Voidaan osoittaa, että tällöin f on integroitava myös A :n sisuksessa $\text{int}(A)$, reunalla ∂A ja sulkeumassa \bar{A} (ks. määritelmä 1.56). Lisäksi voidaan osoittaa, että reunan ∂A pinta-ala $= 0$, jolloin

$$\iint_{\partial A} f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

Niinpä

$$\iint_{\text{int}(A)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\bar{A}} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (2.18)$$

Integroimistuloksen kannalta ei siten ole merkitystä sillä, mitkä reunapisteet kuuluvat integroimisjoukkoon ja mitkä eivät.

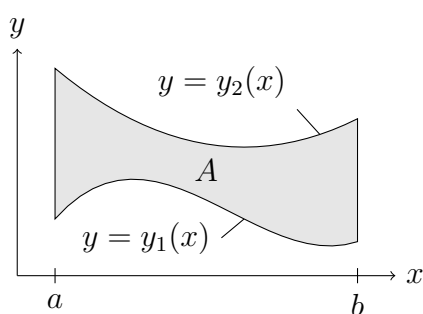
Määritelmä 2.19. $A \subset \mathbb{R}^2$ on *x-projisoituva* (*x-simple*), jos se on muotoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

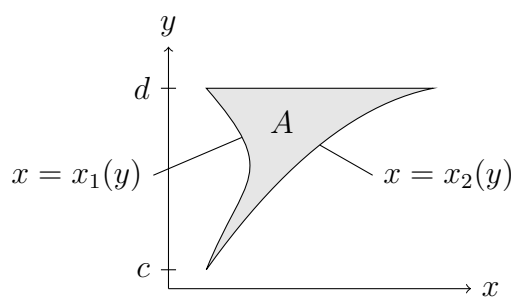
missä y_1 ja y_2 ovat jatkuvia funktioita. $A \subset \mathbb{R}^2$ on *y-projisoituva* (*y-simple*), jos se on muotoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

missä x_1 ja x_2 ovat jatkuvia funktioita.



x -projisoituva joukko



y -projisoituva joukko

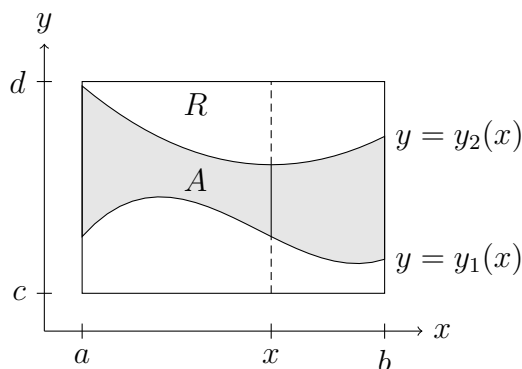
Lause 2.20. Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Jos A on x -projisoituva, niin f on integroitava ja

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx,$$

ja jos A on y -projisoituva, niin f on integroitava ja

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Todistus. Integroitavuuden tarkastelun sivuutamme. Todistetaan kaava siinä tapauksessa, että A on x -projisoituva (y -projisoituva tapaus vastaavasti).



Peitetään A suorakulmiolla $R = [a, b] \times [c, d]$. Tällöin kullakin $x \in [a, b]$ kuvan mukaisella pystysuoralla janalla nollajatko $f^0(x, y) = 0$, kun $y \in [c, y_1(x)]$ tai $y \in [y_2(x), d]$ ja $f^0(x, y) = f(x, y)$, kun $y \in [y_1(x), y_2(x)]$. Siten lauseen 2.6 viipalointiperiaatteen mukaan

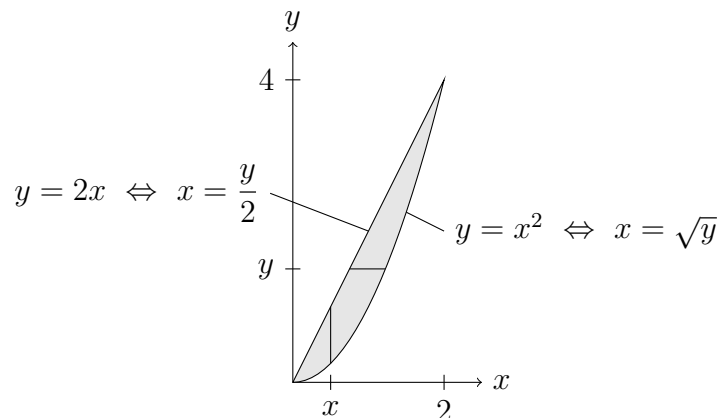
$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_R f^0(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f^0(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{y_1(x)} 0 dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d 0 dy \right) dx \\ &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 2.21. Olkoon A käyrien $y = 2x$ ja $y = x^2$ rajaama rajoitettu tasojoukko. Laske

$$\iint_A (4x + 2) dx dy$$

kummassakin integroimisjärjestyksessä.

Ratkaisu. Käyrien leikkauspisteissä $2x = x^2 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2$.



A on x -projisoituva, sillä

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Uloimman integroimismuuttujan x rajat ovat siis $0 \dots 2$ ja kullakin x y :n rajat ovat $x^2 \dots 2x$ (ks. kuva):

$$\begin{aligned} \iint_A (4x + 2) \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4xy + 2y) \, dx \\ &= \int_0^2 (8x^2 + 4x - (4x^3 + 2x^2)) \, dx \\ &= \int_0^2 (-4x^3 + 6x^2 + 4x) \, dx \\ &= \int_0^2 (-x^4 + 2x^3 + 2x^2) \, dx = -16 + 16 + 8 = 8. \end{aligned}$$

A on myös y -projisoituva, sillä

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 4], \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}.$$

Uloimman integroimismuuttujan y rajat ovat siis $0 \dots 4$ ja kullakin y x :n

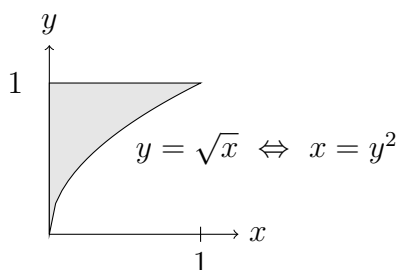
rajat ovat $y/2 \dots \sqrt{y}$ (ks. kuva):

$$\begin{aligned} \iint_A (4x + 2) dx dy &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy \\ &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (2x^2 + 2x) dy \\ &= \int_0^4 \left(2y + 2y^{1/2} - \left(\frac{1}{2}y^2 + y \right) \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 2y^{1/2} \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{4}{3}y^{3/2} \right) dy = -\frac{32}{3} + 8 + \frac{32}{3} = 8. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.22. Laske

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx.$$

Ratkaisu. Funktion e^{y^3} integrointi y :n suhteen ei suoraan onnistu. Hahmotellaan kuva integroimisjoukosta A ja kokeillaan toista integroimisjärjestystä. Ulomman integroimismuuttujan x rajat ovat $0 \dots 1$ ja kullakin x y :n rajat ovat $\sqrt{x} \dots 1$, joten saadaan oheisen kuvan mukainen joukko.

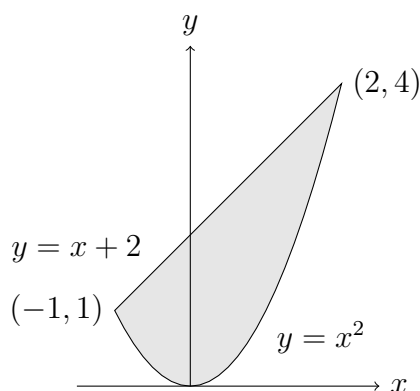


Toisessa järjestyksessä ulomman integroimismuuttujan y rajat ovat $0 \dots 1$ ja kullakin y x :n rajat ovat $0 \dots y^2$, joten

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} x e^{y^3} dy \\ &= \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \int_0^1 \frac{1}{3} e^{y^3} = \frac{e-1}{3}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.23. Laske paraabelin $y = x^2$ ja suoran $y = x + 2$ rajaaman tasojoukon A pinta-ala.

Ratkaisu. On laskettava funktion 1 integraali joukossa A .

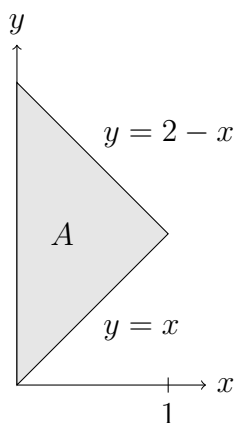


Käyrien $y = x^2$ ja $y = x + 2$ leikkauspisteissä $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 2$. Niinpä

$$\begin{aligned} a(A) &= \iint_A 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx = \int_{-1}^2 \left[y \right]_{x^2}^{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) \, dx = \dots = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.24. Laske sen joukon T tilavuus, jota rajoittaa ylhäältä paraboloidi $z = x^2 + y^2$ ja alhaalta xy -tasossa suorien $y = x$, $x = 0$ ja $y + x = 2$ rajaama rajoitettu joukko.

Ratkaisu. On laskettava funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ integraali em. suorien rajaamassa joukossa A .



Suorien $y = x$ ja $y = 2 - x$ leikkauspiste on $(1, 1)$, joten A on kuvan mukainen

kolmiojoukko.

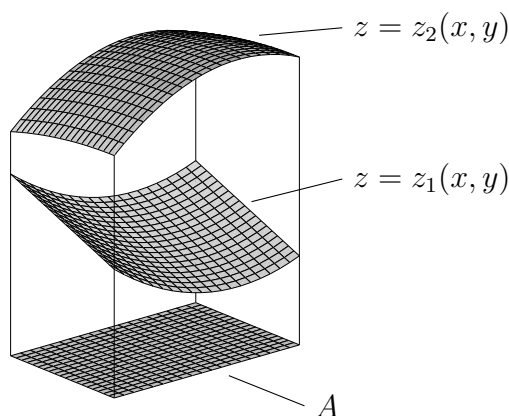
$$\begin{aligned}
 v(T) &= \iint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 - \left(x^3 + \frac{1}{3}x^3 \right) \right) \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{8}{3} \right) \, dx = \dots = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Olkoot $z_1(x, y)$ ja $z_2(x, y)$ jatkuvia funktioita joukossa $(x, y) \in A$. Oletetaan, että $z_2(x, y) \geq z_1(x, y) \geq 0$. Silloin pinnan $z = z_2(x, y)$ ja A :n väliin jäävän joukon tilavuus V_2 ja pinnan $z = z_1(x, y)$ ja A :n väliin jäävän joukon tilavuus V_1 ovat lauseen 2.17 kohdan (2) mukaan

$$V_2 = \iint_A z_2(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ja} \quad V_1 = \iint_A z_1(x, y) \, dx \, dy.$$

Nyt pintojen z_1 ja z_2 väliin jäävän joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ tilavuus on $V_2 - V_1$, ts.

$$v(T) = \iint_A (z_2(x, y) - z_1(x, y)) \, dx \, dy. \quad (2.25)$$



Kaava (2.25) pätee myös, vaikka z_1 ja z_2 eivät olisikaan kaikkialla ei-negatiivisia. Jos näet $m = \min_A z_1 < 0$, niin pinnat $z = z_2(x, y) - m$ ja $z = z_1(x, y) - m$ ovat ei-negatiivisia ja rajaavat väliinsä saman tilavuuden kuin z_2 ja z_1 . Näille pinnoille kaavassa (2.25) tulee laskettavaksi integraali funktiosta $(z_2(x, y) - m) - (z_1(x, y) - m) = z_2 - z_1$, eli päädytään samaan kaavaan.

Esimerkki 2.26. Laske elliptisen paraboloidin $z = x^2 + 3y^2$ ja pinnan $z = 4 - y^2$ rajaaman rajoitetun joukon T tilavuus.

Ratkaisu. Paraboloidi avautuu ylöspäin ja toinen pinta alaspäin, joten tässä alempi pinta on $z_1(x, y) = x^2 + 3y^2$ ja ylempi pinta $z_2(x, y) = 4 - y^2$. Integroimisjoukon A selvittämiseksi on ratkaistava epäyhtälö $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$: $x^2 + 3y^2 \leq 4 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 \leq 4$. Integroimisjoukon reunakäyrä on siis ellipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ ja A voidaan kirjoittaa y -projisoituvana joukkona

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], -\sqrt{4 - 4y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - 4y^2} \right\}.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} v(T) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{\sqrt{4-4y^2}} (4 - y^2 - (x^2 + 3y^2)) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{\sqrt{4-4y^2}} (4 - x^2 - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{4-4y^2}} (4 - x^2 - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{4-4y^2}} \left(4x - \frac{1}{3}x^3 - 4xy^2 \right) \, dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left(4\sqrt{4-4y^2} - \frac{1}{3}(4-4y^2)^{3/2} - 4\sqrt{4-4y^2}y^2 \right) \, dy \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (4-4y^2)^{3/2} \, dy = \frac{32}{3} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{3/2} \, dy \\ &= \frac{32}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 u \, du = 4\pi. \end{aligned}$$

Tässä kolmannella rivillä käytettiin tietoa, että integrandi on parillinen funktio x :n suhteen. Viimeisellä rivillä tehtiin muuttujanvaihto $y = \sin u$, jolloin $dy = \cos u \, du$ ja $\sqrt{1 - y^2} = \cos u$ (piirrä suorakulmainen kolmio, jossa u on terävä kulma). $\int_0^{\pi/2} \cos^4 u \, du$ katsotaan taulukosta.

Määritelmä 2.27. $A \subset \mathbb{R}^2$ on *yhtenäinen*, jos mitkä tahansa kaksi A :n pistettä voidaan yhdistää jatkuvalla käyrällä, joka on kokonaan A :ssa.

Lause 2.28 (Tasointegraalin väliarvolause). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu, rajoitettu ja yhtenäinen, ja olkoon $a(A) > 0$. Jos $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa $(a, b) \in A$ siten, että*

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = f(a, b)a(A). \quad (2.29)$$

Todistus. Koska A on suljettu ja rajoitettu, niin jatkuva funktio f saavuttaa siellä pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M . Saavutettakoon nämä arvot pisteissä $(x_1, y_1) \in A$ ja $(x_2, y_2) \in A$, ts. $f(x_1, y_1) = m$ ja $f(x_2, y_2) = M$. Nyt $m \leq f(x, y) \leq M$ kaikilla $(x, y) \in A$, joten lauseen 2.17 kohdan (6) mukaan

$$\iint_A m \, dx \, dy \leq \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_A M \, dx \, dy.$$

Laskemalla oikean ja vasemmanpuoleiset integraalit lauseen 2.17 kohtien (4) ja (1) mukaisesti saadaan

$$ma(A) \leq \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \leq Ma(A),$$

joten

$$m \leq \frac{1}{a(A)} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \leq M.$$

Koska A on yhtenäinen, voidaan pisteet (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) yhdistää käyrällä $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ($0 \leq t \leq 1$) siten, että $\mathbf{r}(0) = (x_1, y_1)$ ja $\mathbf{r}(1) = (x_2, y_2)$. Nyt $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ on välillä $[0, 1]$ jatkuva reaalifunktio, jolle $g(0) = m$ ja $g(1) = M$. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen mukaan g saavuttaa myös kaikki arvojen m ja M väliset arvot. Erityisesti se saavuttaa eräässä pisteessä $t_0 \in [0, 1]$ arvon

$$g(t_0) = f(\mathbf{r}(t_0)) = \frac{1}{a(A)} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy.$$

Voidaan siis valita $(a, b) = \mathbf{r}(t_0)$. □

Jos (a, b) on kuten lauseessa 2.28, niin

$$\begin{aligned} \iint_A (f(x, y) - f(a, b)) \, dx \, dy &= \iint_A f(x, y) \, dx \, dy - \iint_A f(a, b) \, dx \, dy \\ &= \iint_A f(x, y) \, dx \, dy - f(a, b)a(A) \\ &= \iint_A f(x, y) \, dx \, dy - \iint_A f(x, y) \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

Niinpä funktion $f(x, y) - f(a, b)$ kuvaajan ja xy -tason väliin jäävästä tilavuudesta on yhtä paljon xy -tason ala- kuin yläpuolella. Siten funktion $f(x, y)$ kuvaajan ja tason $z = f(a, b)$ väliin jäävästä tilavuudesta on yhtä paljon tason $z = f(a, b)$ ala- kuin yläpuolella.

Tällä perusteella arvoa $f(a, b)$ voidaan sanoa funktion f keskiarvoksi joukossa A . Keskiarvo voidaan määrittellä myös niille integroituville funktioille, jotka eivät ole jatkuvia.

Määritelmä 2.30. Integroituvan funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^2$) keskiarvo (average value) on luku

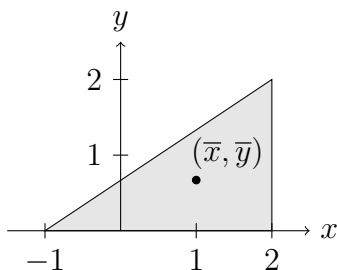
$$\bar{f} = \frac{1}{a(A)} \iint_A f(x, y) dx dy.$$

Tasointegraalin väliarvolause voidaan nyt muotoilla niin, että ”jatkuva funktio saavuttaa keskiarvonsa”.

Esimerkki 2.31. Laske funktioiden $f(x, y) = x$ ja $g(x, y) = y$ keskiarvot kolmiossa A , jonka kärkipisteet ovat $(-1, 0)$, $(2, 0)$ ja $(2, 2)$.

Ratkaisu. Kolmion pinta-ala on $a(A) = (3 \cdot 2)/2 = 3$ ja

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right\}.$$



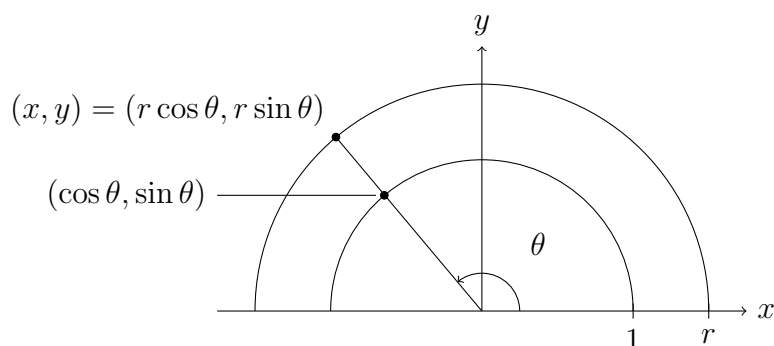
Niinpä

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{3} \iint_A x dx dy = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \int_0^{2x/3+2/3} x dy dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \left/ \int_0^{2x/3+2/3} xy dx \right. \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx = 1 \quad \text{ja} \\ \bar{y} &= \frac{1}{3} \iint_A y dx dy = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \int_0^{2x/3+2/3} y dy dx = \frac{1}{6} \int_{-1}^2 \left/ \int_0^{2x/3+2/3} y^2 dx \right. \\ &= \frac{1}{54} \int_{-1}^2 (4x^2 + 8x + 4) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Esimerkissä 2.31 x :n keskiarvo \bar{x} ja y :n keskiarvo \bar{y} joukossa $A \subset \mathbb{R}^2$ antavat joukon A painopisteen (\bar{x}, \bar{y}) .

2.4 Tasointegraalin laskeminen napakoordinaateilla

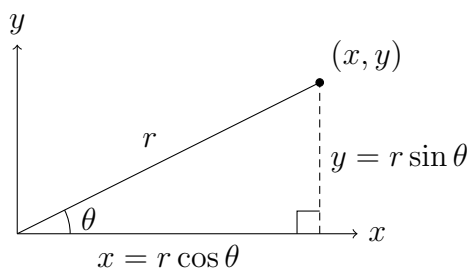
Tason \mathbb{R}^2 piste (x, y) voidaan ilmaista *napakoordinaattien* (*polar coordinates*) r (etäisyys origosta) ja θ (kulma positiivisesta x -akselista vastapäivään) avulla. Kosinin ja sinin määritelmien mukaan kulmaa θ vastaava kehäpiste yksikköympyrällä on $(\cos \theta, \sin \theta)$, joten r -säteisellä ympyrällä kehäpiste on $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.



x - ja y -koordinaattien ja napakoordinaattien r ja θ välinen riippuvuus on siis

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.32)$$

Tapauksessa $0 < \theta < \pi/2$ riippuvuudet voidaan lukea myös seuraavan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta:



Käänteiseen suuntaan kaavat (2.32) voidaan kirjoittaa

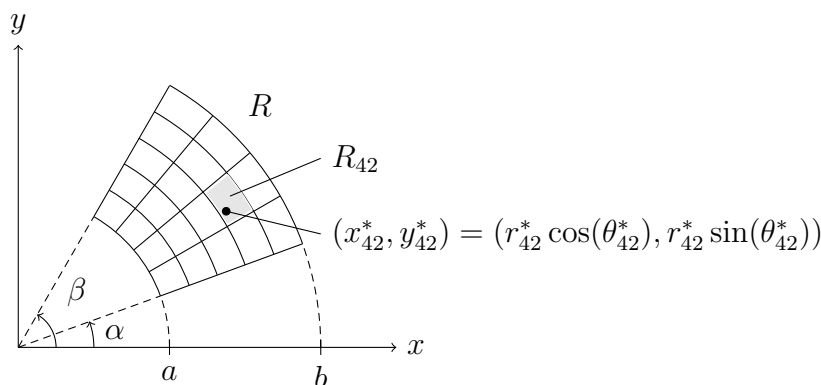
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{kun } x \neq 0) \end{cases} \quad (2.33)$$

Jälkimmäisestä voidaan laskea suoraan $\theta = \arctan(y/x)$ silloin, kun $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Muissa tapauksissa kulman osuminen oikeaan neljännekseen tulee erikseen pohtia. θ ei ole yksikäsitteinen, sillä kiinnitetyllä r kulmat $\theta + n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) vastaavat samaa pistettä. Tilanteesta ja sovelluksesta riippuen θ on tapana valita väliltä $[0, 2\pi]$ tai $[-\pi, \pi]$.

Riemannin summa (2.2) voidaan kirjoittaa

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) a(R_{ij}),$$

missä $a(R_{ij})$ on R_{ij} :n pinta-ala. Integroimisjoukon R ja joukkojen R_{ij} ei tarvitse olla suorakulmioita. Tarkastellaan esimerkiksi kuvan mukaista joukkoa R , joka koostuu napakoordinaateissa ilmaistuna pisteistä $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$.



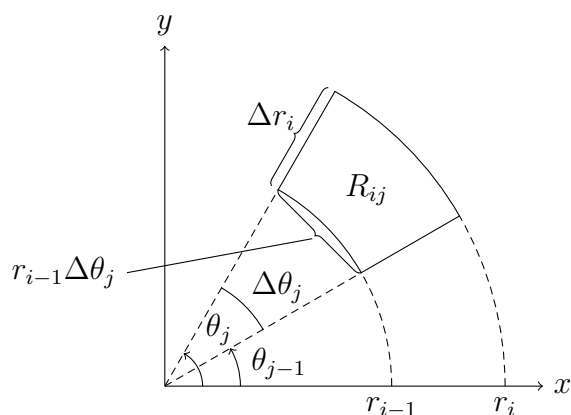
Valitaan välin $[a, b]$ jako

$$a = r_0 < r_1 < \dots < r_m = b$$

ja välin $[\alpha, \beta]$ jako

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta.$$

Nyt R jakautuu kuvan mukaisiin osajoukkoihin R_{ij} , jotka koostuvat napakoordinaateissa ilmaistuna pisteistä $r_{i-1} \leq r \leq r_i$, $\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$. Merkitään $\Delta r_i = r_{i-1} - r_i$ ja $\Delta \theta_j = \theta_{j-1} - \theta_j$ ja valitaan pisteet $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = (r_{ij}^* \cos(\theta_{ij}^*), r_{ij}^* \sin(\theta_{ij}^*)) \in R_{ij}$.



Kun $\Delta\theta_j$ ja Δr_i ovat pieniä, niin R_{ij} on oleellisesti suorakulmio, jolloin sen pinta-alaa voidaan arvioida $a(R_{ij}) \approx r_{i-1} \Delta\theta_j \Delta r_i$ (eli kanta \times korkeus). Siten

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) a(R_{ij}) \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}^* \cos(\theta_{ij}^*), r_{ij}^* \sin(\theta_{ij}^*)) r_{i-1} \Delta r_i \Delta \theta_j.$$

Tämän yhtälön vasen puoli on integraaliin

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

liittyvä Riemannin summa ja oikea puoli integraaliin

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

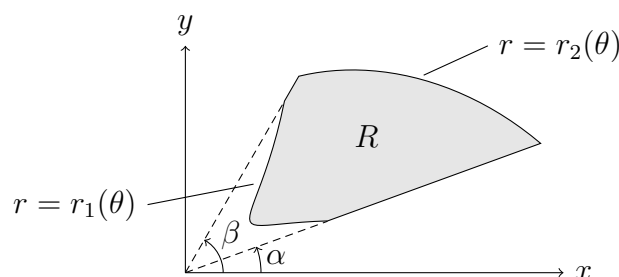
liittyvä Riemannin summa. Jaon tihentyessä edellä tehty arvio " \approx " paranee, joten olemme saaneet perusteltua:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (2.34)$$

Integraalissa (2.34) r on pinta-alan suurennessuhde: kuvajoukon pinta-ala on r -kertainen pinta-alaan $\Delta\theta \Delta r$ verrattuna. Palataan suurennessuhteeseen vielä luvussa 2.9. Tulos (2.34) pätee yleisempiinkin joukkoihin:

Lause 2.35. *Olkoon $R \subset \mathbb{R}^2$ tasojoukko, joka koostuu niistä pisteistä, joille napakoordinaateissa (r, θ) ilmaistuna pätee $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ja $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, missä r_1 ja r_2 ovat jatkuvia funktioita. Jos $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroitava ja*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (2.36)$$



Esimerkki 2.37. Olkoon $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.
Laske

$$\iint_R xy \, dx \, dy.$$

Ratkaisu. R on joukko, jonka pisteille napakoordinaateissa ilmaistuna pätee $1 \leq r \leq 2$ ja $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Piirrä kuva! Niinpä

$$\begin{aligned} \iint_R xy \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \int_1^2 \frac{1}{4} r^4 \, d\theta \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{15}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Huomautuksen 2.9 mukaan voitaisiin myös separoida ja kirjoittaa suoraan

$$\iint_R xy \, dx \, dy = \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_1^2 r^3 \, dr \right) = \dots$$

Esimerkki 2.38. Laske paraboloidin $z = 4 - x^2 - y^2$ ja xy -tason väliin jäävän rajoitetun joukon T tilavuus.

Ratkaisu. Paraboloidi avautuu alaspäin ja z -koordinaattia rajaa ehto $z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. Niinpä T :n projektio xy -tasolle on 2-säteinen origokeskinen kiekko

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\} \end{aligned}$$

ja kysytty tilavuus on siten

$$v(T) = \iint_R (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy.$$

xy -koordinaateissa integroinnista tulisi hankala:

$$v(T) = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) \, dy \, dx.$$

Napakoordinaateissa R :n rajat ovat $0 \leq r \leq 2$ ja $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ja koska $x^2 + y^2 = r^2$, niin

$$\begin{aligned} v(T) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)r \, dr \, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^2 (4 - r^2)r \, dr \right) \\ &= 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) \, dr = 2\pi \Big/_0^2 \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) = 8\pi. \end{aligned}$$

Huomautus 2.39. Pallopinta ja sylinteripinta.

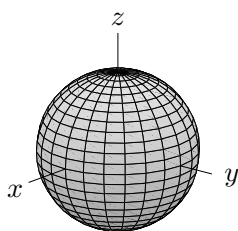
Olkoon $a > 0$. Joukon

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

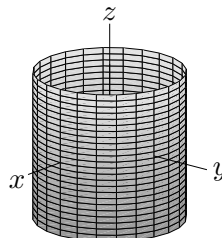
pisteiden (x, y, z) etäisyys origosta on vakio a , joten S on a -säteinen *pallopinta*. Joukossa

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$$

etäisyys z -akselista on vakio a , joten S on a -säteinen *sylinteripinta*.



$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



$$x^2 + y^2 = a^2$$

Joukko

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

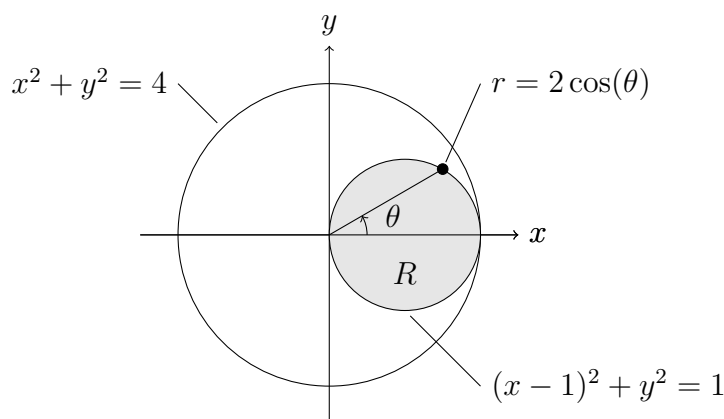
koostuu pisteistä, joiden etäisyys origosta on $\leq a$, joten T on a -säteinen suljettu pallo. Joukko

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

koostuu pisteistä, joiden etäisyys z -akselista on $\leq a$, joten T on a -säteisen sylinteripinnan rajoittama joukko ("umpinainen tanko").

Esimerkki 2.40. Laske sen joukon T tilavuus, jonka sylinteripinta $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ leikkaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Ratkaisu. Ylhäältä positiivisen z -akselin suunnasta katsottuna leikkaus xy -tason ($z = 0$) kanssa näyttää seuraavalta:



On laskettava sylinterijoukon $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ sen osan tilavuus, joka on pintojen $z_1 = -\sqrt{4-x^2-y^2}$ ja $z_2 = \sqrt{4-x^2-y^2}$ välissä, ts.

$$\begin{aligned} v(T) &= \iint_R \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - \left(-\sqrt{4-x^2-y^2} \right) \right) dx dy \\ &= 2 \iint_R \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy, \end{aligned}$$

missä $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Käytetään napakoordinaatteja. Selvästi $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ja kullakin θ r :n alaraja on 0. r saavuttaa suurimman arvonsa R :n reunalla, eli kun

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 = 2r \cos \theta \stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} r = 2 \cos \theta.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} v(T) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{4-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{4-r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\underbrace{8(1-\cos^2 \theta)^{3/2}}_{(\sin^2 \theta)^{3/2} = |\sin \theta|^3 = \sin^3 \theta} - 8 \right) d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{32}{3} \left(\int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{32}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9} \approx 9,6440, \end{aligned}$$

missä $\sin^3 \theta$:n integraali katsotaan taulukosta tai tietokoneella.

2.5 Avaruusintegraali

Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko ja $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Peitetään T suorakulmaisella särmiöllä, jonka sivut ovat koordinaattitasojen suuntaiset. Jaetaan särmiö osasärmiöihin T_{ijk} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$, joiden särmien pituudet ovat Δx_j , Δy_j ja Δz_k ja tilavuudet siten $\Delta x_j \Delta y_j \Delta z_k$. Otetaan mukaan ne osasärmiöt T_{ijk} , joille $T_{ijk} \subset T$. Valitaan pisteet $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in T_{ijk}$. Jaon normi $|P|$ on maksimi osasärmiöiden T_{ijk} halkaisijoista. Määritellään nyt funktion $f(x, y, z)$ integraali vastaavalla tavoin kuin kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ integraali lauseessa 2.15.

Määritelmä 2.41. Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko ja $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Määritellään f :n *integraali yli joukon T* asettamalla

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1 \\ T_{ijk} \subset T}}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x_j \Delta y_j \Delta z_k, \end{aligned} \quad (2.42)$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Integraalia merkitään myös

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dV = \iiint_T f \, dV = \iiint_T f.$$

Määritelmän summaa kutustaan *Riemannin summaksi*. Lauseessa 2.15 Riemannin summassa kerrottiin $f(x, y)$:n arvo osasuorakulmiossa sen pinta-alalla. Nyt kerrotaan $f(x, y, z)$:n arvo osasärmiössä sen tilavuudella.

Huomataan, että

$$\boxed{\iiint_T 1 \, dV = v(T) = \text{joukon } T \text{ tilavuus.}} \quad (2.43)$$

Lauseen 2.17 kohtien (4)–(8) ominaisuudet yleistyvät myös avaruusintegraalille.

Integroituvuus riippuu sekä funktion f että joukon T ominaisuuksista. Usein käytännön tilanteissa pärjätään seuraavalla tuloksella. Käsite *sileä pinta* määritellään tarkemmin opintojaksolla Vektorianalyysi. Esimerkiksi tasot, pallopinnat, sylinteripinnat ja paraboloidipinnat ovat sileitä pintoja.

Lause 2.44. *Jos T on suljettu, T :n reuna koostuu äärellisen monesta sileästä pinnasta ja $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroitava.*

Tasointegraalin viipalointiperiaate (lause 2.6) ja laskumenetelmä projisoitu-
vassa joukossa (lause 2.20) yleistyvät avaruusintegraaleille (lauseet 2.45 ja
2.48).

Lause 2.45 (Fubinin lause, viipalointiperiaate). *Särmiössä* $T = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ (ts. $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$ ja $c_1 \leq z \leq c_2$) jatkuva funktio $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ on integroitava ja

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dV &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) dx dy dz = \dots \end{aligned}$$

(yhteensä 6 mahdollista järjestystä).

Esimerkki 2.46. Laske

$$\iiint_T x^2 y z dV,$$

kun $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1\}$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \iiint_T x^2 y z dV &= \int_{-1}^1 \int_2^3 \int_0^1 x^2 y z dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_2^3 \left/ \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 y z^2 dy dx \right. \\ &= \int_{-1}^1 \int_2^3 \frac{1}{2} x^2 y dy dx = \int_{-1}^1 \left/ \int_2^3 \frac{1}{4} x^2 y^2 dx \right. \\ &= \int_{-1}^1 \frac{5}{4} x^2 dx = \left/ \int_{-1}^1 \frac{5}{12} x^3 = \frac{5}{6} \right. \end{aligned}$$

Kokeile integroida myös muissa yhteensä kuudessa eri järjestyksessä!

Jos sisäkkäisillä integraaleilla on vakiorajat ja integroitava funktio voidaan separoida muotoon $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$, niin integraali voidaan separoida samaan tapaan kuin tasointegraali (huomautus 2.9), eli esimerkin 2.46 integraali voidaan laskea

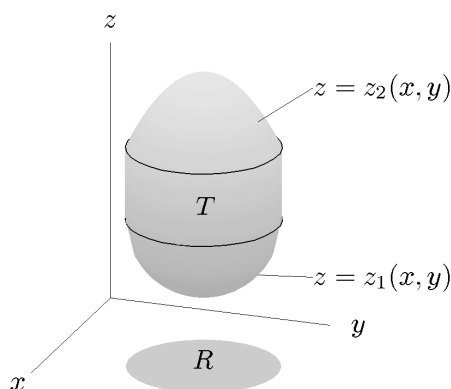
$$\begin{aligned} \iiint_T x^2 y z dV &= \left(\int_{-1}^1 x^2 dx \right) \left(\int_2^3 y dy \right) \left(\int_0^1 z dz \right) \\ &= \left(\left/ \int_{-1}^1 \frac{1}{3} x^3 \right. \right) \left(\left/ \int_2^3 \frac{1}{2} y^2 \right. \right) \left(\left/ \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 \right. \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Usein integraalin laskeminen perustuu integroimisjoukon projisoituvuuteen.

Määritelmä 2.47. $T \subset \mathbb{R}^3$ on xy -projisoituva (z -simple), jos se on muotoa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

missä R on suljettu ja rajoitettu xy -tason joukko sekä z_1 ja z_2 jatkuvia funktioita. xz - ja yz -projisoituvuus määritellään vastaavasti.



Lause 2.48. Olkoon $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Jos T on xy -projisoituva, niin

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$

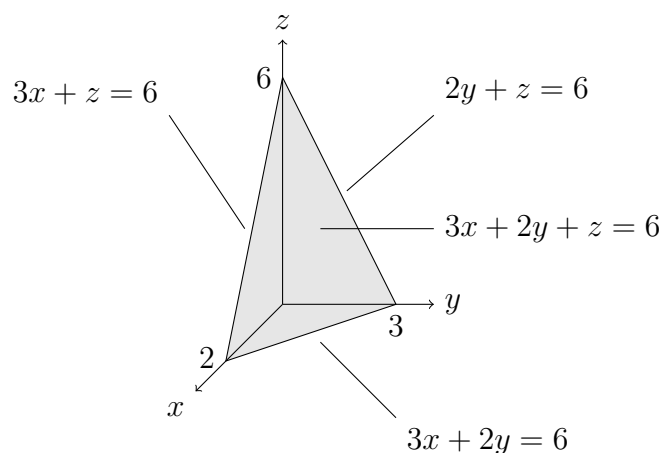
Vastaavat tulokset ovat voimassa myös xz - ja yz -projisoituville joukoille.

Esimerkki 2.49. Laske

$$\iiint_T z dV,$$

missä T on koordinaattitasojen ja tason $3x + 2y + z = 6$ rajoittama joukko.

Ratkaisu. Ko. tason ja x -akselin leikkauspiste saadaan asettamalla tason yhtälössä $y = z = 0$: $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$. Samalla tavoin y -akselin leikkauspisteeksi saadaan $y = 3$ ja z -akselin $z = 6$. Kyseisen tason ja xy -tason leikkaussuora saadaan asettamalla tason yhtälössä $z = 0$: $3x + 2y = 6$ eli $y = (6 - 3x)/2$.



T on xy -projisoituva, projektiojoukkona

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (6 - 3x)/2, 0 \leq x \leq 2\}.$$

Lisäksi kullakin $(x, y) \in R$ z :n alaraja on 0 ja yläraja ratkaistaan tason yhtälöstä: $z = 6 - 3x - 2y$. Niinpä

$$\begin{aligned} \iiint_T z \, dV &= \int_0^2 \int_0^{(6-3x)/2} \int_0^{6-3x-2y} z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{(6-3x)/2} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{6-3x-2y} dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{(6-3x)/2} (6 - 3x - 2y)^2 dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{(6-3x-2y)^3}{-6} \right]_0^{(6-3x)/2} dx = \frac{1}{12} \int_0^2 (6 - 3x)^3 dx \end{aligned}$$

Tässä laskussa on kuusi eri vaihtoehtoa integroimisjärjestykselle. Voitaisiin laskea myös esimerkiksi

$$\iiint_T z \, dV = \int_0^6 \int_0^{(6-z)/2} \int_0^{(6-2y-z)/3} z \, dx \, dy \, dz = \dots = 9.$$

Kokeile eri järjestyksiä!

Esimerkki 2.50. Laske

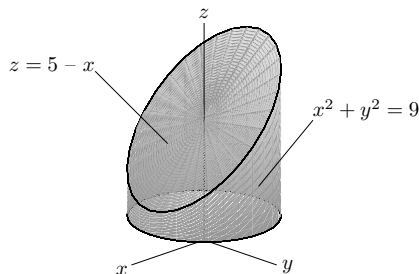
$$\iiint_T (x^2 + y^2) \, dV,$$

kun T on 3-säteisen sylinteripinnan $x^2 + y^2 = 9$ ja tasojen $z = 1$ ja $x + z = 5$ rajaama rajoitettu joukko.

Ratkaisu. T on xy -projisoituva:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 5 - x, (x, y) \in R\},$$

missä projektiojoukko on 3-säteinen kiekko $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.



Integroidaan ensin z :n suhteen ja siirrytään xy -tasossa napakoordinaatteihin:

$$\begin{aligned}
 \iiint_T (x^2 + y^2) dV &= \iint_R (x^2 + y^2) \int_1^{5-x} dz dx dy \\
 &= \iint_R (x^2 + y^2) \Big|_1^{5-x} z dx dy = \iint_R (x^2 + y^2)(4 - x) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2(4 - r \cos \theta)r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r^3 - r^4 \cos \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \Big|_0^3 \left(r^4 - \frac{1}{5}r^5 \cos \theta \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(81 - \frac{243}{5} \cos \theta \right) d\theta \\
 &= \Big|_0^{2\pi} \left(81\theta - \frac{243}{5} \sin \theta \right) = 162\pi.
 \end{aligned}$$

Tasointegraalin väliarvolause (lause 2.28) ja keskiarvon määritelmä (määritelmä 2.30) yleistyvät suoraviivaisesti avaruusintegraalille:

Lause 2.51 (Avaruusintegraalin väliarvolause). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ suljettu, rajoitettu ja yhtenäinen, ja olkoon $v(A) > 0$. Jos $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa $(a, b, c) \in A$ siten, että*

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = f(a, b, c)v(A).$$

Määritelmä 2.52. Integroituvan funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^3$) keskiarvo (average value) on luku

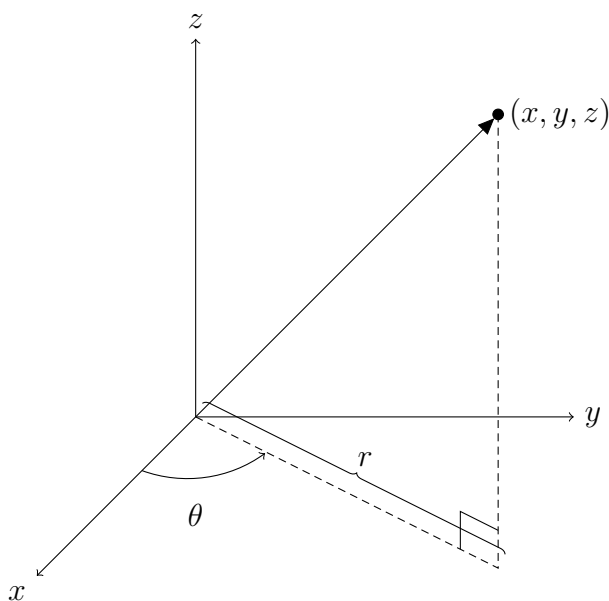
$$\bar{f} = \frac{1}{v(A)} \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

2.6 Avaruusintegraalin laskeminen sylinteri- ja pallokoordinaateilla

2.6.1 Sylinterikoordinaatit

Ilmaistaan määritelmän 2.47 xy -projisoituvan joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ projektiojoukon $R \subset \mathbb{R}^2$ pisteet (x, y) napakoordinaattien (r, θ) avulla, ts. $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$. Tällöin esitystä (r, θ, z) joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ pisteille (x, y, z) kutsutaan *sylinterikoordinaateiksi* (*cylindrical coordinates*):

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (2.53)$$



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Jos pisteitä $(x, y) \in R$ vastaavat napakoordinaatit $(r, \theta) \in S$, niin siirtymällä napakoordinaatteihin lauseen 2.35 mukaisesti saadaan

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dV &= \iint_R \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_S \left(\int_{z_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{z_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz \right) r dr d\theta \\ &= \iiint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta, \end{aligned}$$

missä pisteitä $(x, y, z) \in T$ vastaavat sylinterikoordinaatit $(r, \theta, z) \in U$. Saa-tiin perusteltua:

Lause 2.54. Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ xy -projisoituva joukko, $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja pisteitä $(x, y, z) \in T$ vastaavat sylinterikoordinaatit $(r, \theta, z) \in U$. Tällöin

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Siirryttäessä integroimaan sylinterikoordinaateissa

- sijoita $f(x, y, z)$:n lausekkeeseen muunnokset (2.53),
- kerro integroitava funktio r :llä,
- määritä T :n rajat sylinterikoordinaateissa (joukko U).

Tässä r on tilavuuden suurennussuhde (ks. luku 2.9).

Sylinterikoordinaatteja kannattaa kokeilla tapauksissa, joissa integroimis-joukko T on sylinterisymmetrinen tai funktiossa esiintyy lauseke $x^2 + y^2 = r^2$.

Esimerkki 2.55. Lasketaan esimerkki 2.50 käyttäen sylinterikoordinaatteja: funktio on $x^2 + y^2 = r^2$ ja T :n rajat ovat $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$ ja $1 \leq z \leq 5 - x = 5 - r \cos \theta$, joten voidaan kirjoittaa suoraan

$$\begin{aligned} \iiint_T (x^2 + y^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_1^{5-r \cos \theta} r^2 \cdot r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_1^{5-r \cos \theta} r^3 z dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r^3 - r^4 \cos \theta) dr d\theta = \dots = 162\pi. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.56. Laske $\iiint_T (x^2 + y^2) dV$, missä

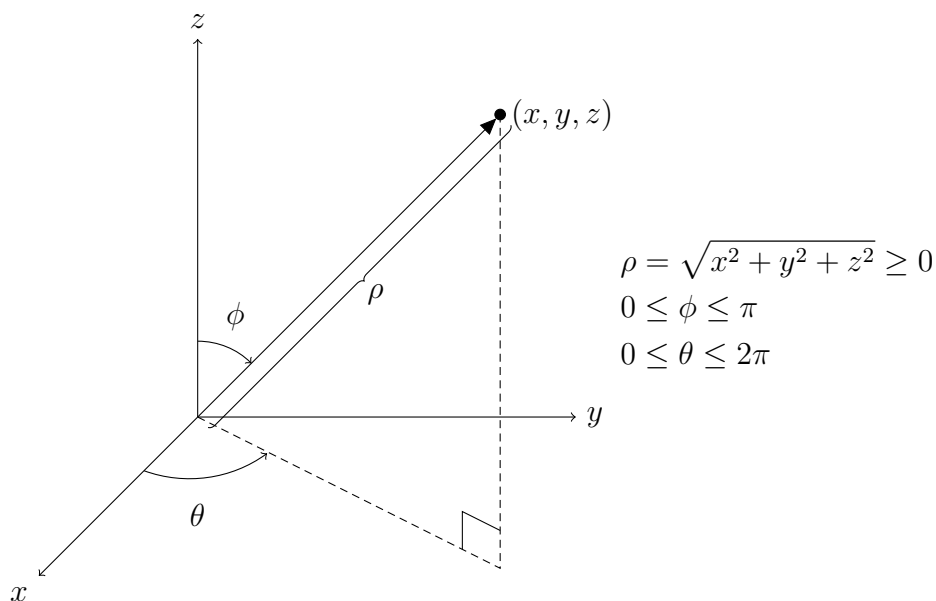
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

Ratkaisu. T on 1-säteisen sylinterin ensimmäisessä koordinaattikahdeksan-neksessä oleva osa, jota rajoittaa alhaalta xy -taso $z = 0$ ja ylhäältä pinta $z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - r^2$. Piirrä kuva! Lisäksi $x^2 + y^2 = r^2$, joten

$$\begin{aligned} \iiint_T (x^2 + y^2) dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2-r^2} r^2 \cdot r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2-r^2} r^3 z dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (2 - r^2) r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

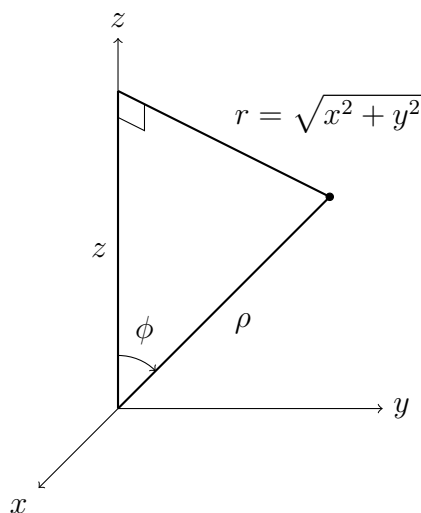
2.6.2 Pallokoordinaatit

Merkitään paikkavektorin (x, y, z) pituutta ρ :lla, positiivisen z -akselin ja paikkavektorin (x, y, z) välistä kulmaa ϕ :llä sekä positiivisen x -akselin ja projektiovektorin (x, y) välistä kulmaa θ :lla kuvan mukaisesti.



Alla olevan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta päätellään, että

$$r = \rho \sin \phi \quad \text{ja} \quad z = \rho \cos \phi.$$



(r, θ) on projektiovektorin (x, y) napakoordinaattiesitys, joten

$$x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta \quad \text{ja} \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta.$$

Esitystä (ρ, ϕ, θ) pisteelle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ kutsutaan *pallokoordinaateiksi* (*spherical coordinates*):

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi. \end{cases} \quad (2.57)$$

Lause 2.58. Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ ”riittävän siisti” joukko, jolle pisteitä $(x, y, z) \in T$ vastaavat pallokoordinaatit $(\rho, \phi, \theta) \in U$, ja olkoon $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$

Siirryttäessä integroimaan pallokoordinaateissa

- sijoita $f(x, y, z)$:n lausekkeeseen muunnokset (2.57),
- kerro integroitava funktio luvulla $\rho^2 \sin \phi$,
- määritä T :n rajat pallokoordinaateissa (joukko U).

Tässä $\rho^2 \sin \phi$ on tilavuuden suurennussuhde (ks. luku 2.9).

Pallokoordinaatteja kannattaa kokeilla tapauksissa, joissa integroimisjoukko T on pallosymmetrinen tai funktiossa esiintyy lauseke $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Esimerkki 2.59. Laske a -säteisen pallon T tilavuus.

Ratkaisu. Olkoon a -säteisen pallon T keskipiste origossa. Tällöin T :n rajat pallokoordinaateissa ovat $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \phi \leq \pi$ ja $0 \leq \theta \leq 2\pi$, joten

$$\begin{aligned} v(T) &= \iiint_T 1 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^a \rho^2 d\rho \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^\pi -\cos \phi \right) \left(\int_0^a \frac{\rho^3}{3} \right) = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.60. Laske $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV$, missä

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x \leq 0, z \geq 0\}.$$

Ratkaisu. T on $\sqrt{2}$ -säteisen pallon neljännes (piirrä kuva!) ja $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, joten

$$\begin{aligned} \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 d\rho \right) \\ &= \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} -\cos \phi \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^5}{5} \right) = \pi \cdot 1 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5}. \end{aligned}$$

2.7 Massa ja massakeskipiste

Tarkastellaan kappaletta $T \subset \mathbb{R}^3$. Olkoon T :n tiheys pisteessä (x, y, z) (etäisyydet metreinä) $\delta(x, y, z)$ (kg/m^3). Valitaan T :lle määritelmän 2.41 mukaiset (pienet) särmiöt $T_{ijk} \subset T$. δ on oleellisesti vakio särmiössä T_{ijk} , joten tiheyttä särmiössä T_{ijk} voidaan arvioida luvulla $\delta(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$. Siten särmiön T_{ijk} massa on $m_{ijk} \approx \delta(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) v(T_{ijk})$ ja

$$\begin{aligned} \iiint_T \delta(x, y, z) dV &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \delta(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) v(T_{ijk}) \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{ijk} = m, \end{aligned} \tag{2.61}$$

missä m on T :n kokonaismassa. Arviot paranevat, kun jakoa tihennetään. Rajalla $|P| \rightarrow 0$ päädytään määritelmään: T :n massa on

$$\boxed{m = \iiint_T \delta dV.} \tag{2.62}$$

Jos p kappaletta massapisteitä m_i ovat paikoissa $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, niin kokonaismassa on

$$m = \sum_{i=1}^p m_i$$

ja systeemin massakeskipiste $\mathbf{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ on paikkavektoreiden \mathbf{r}_i massoilla m_i painotettu keskiarvo

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{r}_i,$$

eli koordinaateittain

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^p m_i x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^p m_i y_i \quad \text{ja} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^p m_i z_i. \quad (2.63)$$

Tulkitsamalla arvioissa (2.61) särmiöt T_{ijk} massapisteiksi saadaan

$$\begin{aligned} \bar{x} &\approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{ijk} x_{ijk}^* \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p x_{ijk}^* \delta(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) v(T_{ijk}) \\ &\approx \frac{1}{m} \iiint_T x \delta(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

\bar{y} ja \bar{z} tutkitaan vastaavasti. Mentäessä rajalle $|P| \rightarrow 0$ arviot paranevat, joten kappaleen T massakeskipisteen $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ koordinaatit on perusteltua määritellä

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \delta dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y \delta dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z \delta dV.} \quad (2.64)$$

Vastaavalla tavoin T :n hitausmomenteiksi x , y ja z -akselien suhteen voidaan perustella määritelmät

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \iiint_T (y^2 + z^2) \delta dV, \\ I_y &= \iiint_T (x^2 + z^2) \delta dV, \\ I_z &= \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV. \end{aligned}} \quad (2.65)$$

Esimerkki 2.66. Laske tasa-aineisen ($\delta(x, y, z) = k = \text{vakio}$) pallon kahdeksanneksen

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

massakeskipiste.

Ratkaisu. Nyt

$$m = \iiint_T \delta dV = kv(T) = k \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3 k}{6}.$$

Oltaisiin voitu myös integroida pallokoordinaatteja käyttäen. Symmetrian nojalla $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. Riittää siis laskea

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint_T z \delta dV = \frac{6}{4\pi a^3 k} \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho \cos \phi k \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho \\ &= \frac{6}{4\pi a^3} \left(\int_0^a \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos \phi (\sin \phi)^1 d\phi \right) \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \\ &= \frac{6}{4\pi a^3} \cdot \frac{a^4}{4} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3a}{8}.\end{aligned}$$

T :n massakeskipiste on siis $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$. Onko tulos järkevä? Piirrä kuva!

Esimerkki 2.67. Laske tasa-aineisen ($\delta(x, y, z) = k = \text{vakio}$) ympyräpohjaisen sylinterin hitausmomentti symmetria-akselin suhteen, kun sylinterin säde on a ja korkeus h .

Ratkaisu. Asetetaan sylinteri koordinaatistoon siten, että symmetria-akselina on z -akseli, pohja on xy -tasolla ja katto korkeudella $z = h$. On laskettava hitausmomentti z -akselin suhteen. Käytetään sylinterikoordinaatteja:

$$\begin{aligned}I_z &= \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h \underbrace{(r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta)}_{= r^3} r dz dr d\theta \\ &= k \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^a r^3 dr \right) \left(\int_0^h dz \right) = k \cdot 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot h = \frac{\pi a^4 h k}{2}.\end{aligned}$$

Taulukkokirjoissa hitausmomentit ilmoitetaan yleensä massan avulla. T :n massa on

$$m = \iiint_T \delta dV = kv(T) = \pi a^2 h k,$$

$$\text{joten } I_z = \frac{1}{2} \pi a^2 h k \cdot a^2 = \frac{1}{2} m a^2.$$

2.8 Epäoleelliset integraalit

Edellä taso- ja avaruusintegraaleissa oletettiin, että integroimisjoukko A on rajoitettu ja että funktio f on rajoitettu (eli A sisältyy johonkin origokeskiseen palloon $B(\mathbf{0}, R)$ ja on olemassa m ja $M \in \mathbb{R}$ siten, että $m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$ kaikilla $\mathbf{x} \in A$). Tutkitaan integroituvuutta myös tapauksissa, joissa A tai f ei ole rajoitettu.

2.8.1 Rajoittamaton integroimisjoukko

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ”riittävän siisti” rajoittamaton joukko, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja $f(x, y) \geq 0$ kaikilla $(x, y) \in A$. Valitaan kasvava jono rajoitettuja joukkoja $A_k \subset A$, jotka *tyhjentävät* A :n, ts.

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \quad \text{ja} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = A. \quad (2.68)$$

Oletetaan vielä, että f on integroitava jokaisessa joukossa A_k . Silloin määritellään

$$\boxed{\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_k} f(x, y) \, dx \, dy.} \quad (2.69)$$

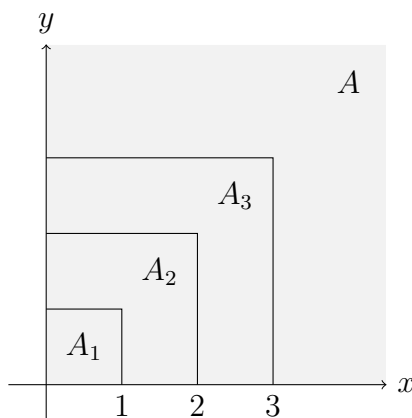
Voidaan osoittaa, että ei-negatiiviselle f tämä raja-arvo on aina olemassa joko ei-negatiivisena reaalilukuna (jolloin integraali *suppenee*) tai lukuna ∞ (jolloin integraali *hajaantuu*), ja että raja-arvo ei riipu joukkojonon $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ valinnasta. Avaruusintegraalille määritellään vastaavasti.

Esimerkki 2.70. Laske

$$I = \iint_A \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \, dx \, dy,$$

kun $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ (ensimmäinen koordinaattineljännes).

Ratkaisu. Integrandi on selvästi rajoitettu ($0 < f(x, y) \leq 1$), mutta A on rajoittamaton. Valitaan $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq k, 0 \leq y \leq k\}$.



Nyt

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_k} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \int_0^k \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^k \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\int_0^k \frac{dy}{1+y^2} \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^k \arctan x \right) \left(\int_0^k \arctan y \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 2.71. Laske

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz.$$

Ratkaisu. Integrandi on selvästi rajoitettu ($0 < f(x, y, z) \leq 1$), mutta integroimisjoukko \mathbb{R}^3 on rajoittamaton. Valitaan A_k :ksi origokeskinen k -säteinen pallo eli $A_k = \overline{B}(\mathbf{0}, k) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq k^2\}$. Integroimalla pallokoordinaateissa nähdään, että

$$\begin{aligned}
 \iiint_{A_k} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^k e^{-\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) \left(-\frac{1}{3} \int_0^k -3\rho^2 e^{-\rho^3} d\rho \right) \\
 &= 2\pi \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \int_0^k e^{-\rho^3} = -\frac{4\pi}{3} (e^{-k^3} - 1) \rightarrow \frac{4\pi}{3},
 \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$, joten $I = 4\pi/3$.

2.8.2 Rajoittamaton funktio

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ”riittävän siisti” rajoitettu joukko, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ rajoittamaton funktio ja $f(x, y) \geq 0$ kaikilla $(x, y) \in A$. Valitaan kasvava jono rajoitettuja joukkoja $A_k \subset A$ siten, että f on rajoitettu ja integroitava jokaisessa joukossa A_k ja että joukot A_k tyhjentävät A :n, ts. (2.68) pätee. Silloin määritellään

$$\boxed{\iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_k} f(x, y) dx dy.} \quad (2.72)$$

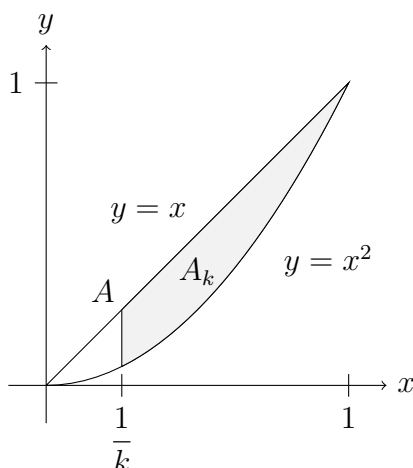
Voidaan osoittaa, että ei-negatiiviselle f tämä raja-arvo on aina olemassa joko ei-negatiivisena reaali-lukuna tai lukuna ∞ , ja että raja-arvo ei riipu joukkojonon $(A_k)_{k=1}^\infty$ valinnasta. Avaruusintegraalille määritellään vastaavasti.

Esimerkki 2.73. Laske

$$\iint_A \frac{1}{xy} dx dy,$$

missä A on käyrien $y = x$ ja $y = x^2$ rajaama joukko.

Ratkaisu. A on rajoitettu, mutta integrandi $f(x, y) \rightarrow \infty$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ joukossa A .



Valitaan $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x, 1/k \leq x \leq 1\}$. Nyt

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} \frac{1}{xy} dx dy &= \int_{1/k}^1 \frac{1}{x} \int_{x^2}^x \frac{1}{y} dy dx = \int_{1/k}^1 \frac{1}{x} \Big|_{x^2}^x \ln y dx \\ &= \int_{1/k}^1 \frac{1}{x} \underbrace{(\ln x - \ln(x^2))}_{\ln x - 2 \ln x = -\ln x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \Big|_{1/k}^1 (\ln x)^2 = -\frac{1}{2} (0 - (\ln(1/k))^2) \rightarrow -\frac{1}{2} (0 - \infty) = \infty, \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$. Integraali siis hajaantuu.

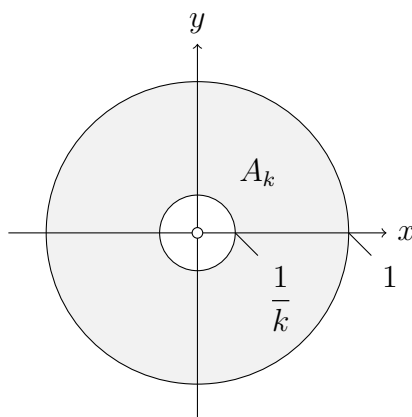
Esimerkki 2.74. Laske

$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

kun A on 1-säteinen punkteerattu kiekko:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ratkaisu. A on rajoitettu, mutta integrandi $f(x, y) \rightarrow \infty$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.



Valitaan $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, ts. A_k on kuvan mukainen rengasalue. Nyt napakoordinaatteja käyttäen

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_k} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{1/k}^1 \frac{1}{r} r dr d\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{1/k}^1 dr \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi(1 - 1/k) = 2\pi. \end{aligned}$$

2.9 Yleinen muuttujanvaihto

2.9.1 Tasointegraali

Tarkastellaan ensin muuttujanvaihtoa \mathbb{R}^2 :ssa muuttujien uv ja xy välillä. *Muuttujanvaihtokuvaus*

$$F: \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2, F(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \quad (2.75)$$

antaa uv -koordinaateissa annetun pisteen koordinaatit xy -koordinaateissa.

Esimerkki 2.76. Esimerkin 1.92 napakoordinaattokuvaus

$$F: \mathbb{R}_{r\theta}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2, F(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (2.77)$$

on muuttujanvaihtokuvaus, jolle $F(r, \theta)$ antaa napakoordinaatteja r ja θ vastaavan pisteen x - ja y -koordinaatit.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$. Lauseessa 2.15 joukkojen $R_{ij} \subset A$ ei tarvitse olla suorakulmioita, eli jos joukot $R_1, \dots, R_k \subset A$ ovat (riittävän siistejä) sisuksiltaan erillisiä ja peittävät A :n sekä valitaan pisteet $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$, niin

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{\max\{\text{diam}(R_i): 1 \leq i \leq k\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*) a(R_i),$$

missä $a(R_i)$ on joukon R_i pinta-ala.

Tarkastellaan nyt muuttujanvaihtoa (2.75). Olkoon $S \subset \mathbb{R}_{uv}^2$ joukkoa $A \subset \mathbb{R}_{xy}^2$ vastaavaa uv -koordinaatiston joukko, ts. $F(S) = A$. Peitetään S suorakulmiolla ja jaetaan se osasuorakulmioihin. Valitaan osasuorakulmioista ne, jotka sisältyvät S :ään ja merkitään niitä $S_1, \dots, S_k \subset S$. Valitaan pisteet $(u_i^*, v_i^*) \in S_i$ ja merkitään S_i :n leveyttä Δu_i :llä ja korkeutta Δv_i :llä, jolloin S_i :n pinta-ala on $a(S_i) = \Delta u_i \Delta v_i$. Nyt kuvajoukot $R_1 = F(S_1), \dots, R_k = F(S_k) \subset A$ likimain peittävät A :n ja saadaan kuvapisteet $(x_i^*, y_i^*) = F(u_i^*, v_i^*) \in R_i$. Lisäksi luvun 1.7.4 mukaan kuvauksessa F pinta-ala muuttuu pisteen (u, v) lähellä $|J_F(u, v)|$ -kertaiseksi, ts.

$$a(R_i) \approx |J_F(u_i^*, v_i^*)| a(S_i) = |J_F(u_i^*, v_i^*)| \Delta u_i \Delta v_i,$$

missä

$$J_F(u, v) = \det(F'(u, v)) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

on kuvauksen F Jacobin determinantti ja

$$|J_F(u, v)| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

suurennussuhde. Niinpä

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*) a(R_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^k f(F(u_i^*, v_i^*)) |J_F(u_i^*, v_i^*)| \Delta u_i \Delta v_i \\ &\approx \iint_S f(F(u, v)) |J_F(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

Ollaan saatu luonnosteltua perustelu seuraavalle muuttujanvaihtolauseelle:

Lause 2.78. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ”riittävän siisti”, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva, muuttujanvaihtokuvaus (2.75) jatkuvasti differentioituva ja $F(S) = A$. Olkoon lisäksi F injektio ja $J_F(u, v) \neq 0$ S :n sisuksessa. Silloin*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_S f(F(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Esimerkki 2.79. Napakoordinaattikuvaukselle (2.77) on

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r,$$

joten saadaan

$$\boxed{\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.} \quad (2.80)$$

Tämä yleistää aiemmin perustellun muodon (2.36).

Usein tunnetaan eksplisiittisesti vain muuttujanvaihtokuvauksen (2.75) käänteiskuvaus

$$F^{-1}: \mathbb{R}_{xy}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{uv}^2, \quad F^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Yhtälöstä (1.128) seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \det((F^{-1})'(x, y)) = \det(F'(u, v)^{-1}) \\ &= \det(F'(u, v))^{-1} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

joten F :n Jacobin determinantti saadaan käänteiskuvauksen Jacobin determinantin avulla:

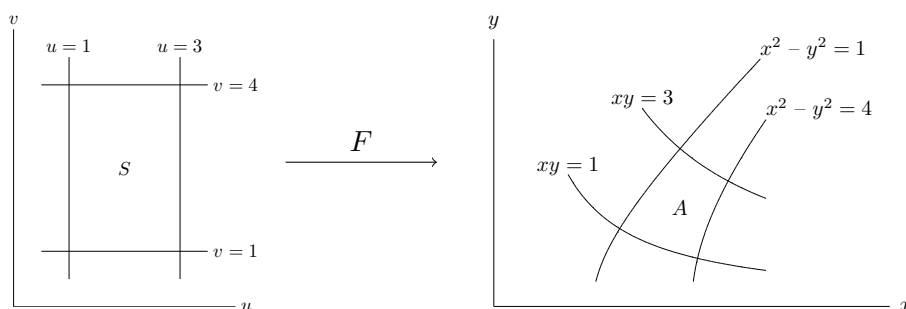
$$\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}.} \quad (2.81)$$

Esimerkki 2.82. Laske

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy,$$

missä A on hyperbelien $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ ja $x^2 - y^2 = 4$ rajaama joukko.

Ratkaisu. Pisteitä $(x, y) \in A$ rajaavat ehdot $1 \leq xy \leq 3$ ja $1 \leq x^2 - y^2 \leq 4$. Tehdään muuttujanvaihto $u = xy$ ja $v = x^2 - y^2$, jolloin u :lla ja v :llä on vakiorajat $1 \leq u \leq 3$ ja $1 \leq v \leq 4$.



Selvitetään, mitä integrandi $x^2 + y^2$ on muuttujissa u ja v :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = v^2 + 4u^2,\end{aligned}$$

joten $x^2 + y^2 = \sqrt{v^2 + 4u^2}$. Lisäksi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2),$$

joten yhtälön (2.81) mukaan

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{2\sqrt{v^2 + 4u^2}}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\iint_A (x^2 + y^2) dx dy &= \int_1^3 \int_1^4 \sqrt{v^2 + 4u^2} \frac{1}{2\sqrt{v^2 + 4u^2}} dv du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_1^3 du \right) \left(\int_1^4 dv \right) = 3.\end{aligned}$$

2.9.2 Avaruusintegraali

Tarkastellaan muuttujanvaihtoa \mathbb{R}^3 :ssa muuttujien uvw ja xyz välillä. Muuttujanvaihtokuvaus on

$$F: \mathbb{R}_{uvw}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3, \quad F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (2.83)$$

ja sen Jacobin determinantti

$$J_F(u, v, w) = \det(F'(u, v, w)) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Lause 2.84. Vastaavin oletuksin kuin lauseessa 2.78 pätee:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(F(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

Lause 2.84 ja seuraavissa esimerkeissä laskettavat suurennussuhteet

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$$

todistavat muuttujanvaihtolauseet 2.54 ja 2.58 sylinteri- ja pallokoordinaateille.

Esimerkki 2.85. Sylinterikoordinaattikuvaukselle

$$F(r, \theta, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

on

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Laske determinantti kehittämällä viimeisen rivin suhteen ja käytä trigonometrian peruskaavaa $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Esimerkki 2.86. Pallokoordinaattikuvaukselle

$$\begin{aligned} F(\rho, \phi, \theta) &= (x(\rho, \phi, \theta), y(\rho, \phi, \theta), z(\rho, \phi, \theta)) \\ &= (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Laske determinantti kehittämällä viimeisen rivin suhteen ja käyttä toistuvasti trigonometrian peruskaavaa. Välillä $0 \leq \phi \leq \pi$ on $\sin \phi \geq 0$, joten

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} \right| = \rho^2 |\sin \phi| = \rho^2 \sin \phi.$$

Liite: Matlab-esimerkkejä

Esimerkki 1. Olkoon $f(x, y) = x^3y^2$. Laske osittaisderivaatat

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sekä derivaattamatriisi $f'(x, y)$.

Piirrä lisäksi funktion kuvaaja ja tasa-arvokäyriä joukossa $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$.

```
syms x y
f=x^3*y^2
diff(f,x)
diff(diff(f,x),y)
diff(f,y,2)
jacobian(f,[x,y])
figure
ezsurf(f,[-1,1,-2,2])
figure
ezcontour(f,[-1,1,-2,2])
```

Esimerkki 2. Olkoon $F(x, y, z) = (xy, x^2z, xyz)$. Laske derivaattamatriisit $F'(x, y, z)$ ja $F'(1, 2, 3)$.

```
syms x y z
F=[x*y, x^2*z, x*y*z]
J=jacobian(F,[x,y,z])
subs(J,[x,y,z],[1,2,3])
```

Esimerkki 3. Laske

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \quad \text{ja} \quad \int_{-1}^2 \int_0^{2x} \int_{-x}^{y^2} xyz dz dy dx.$$

```
syms x y z
int(int(x^2+y^2,y,-sqrt(4-x^2),sqrt(4-x^2)),x,-2,2)
int(int(int(x*y*z,z,-x,y^2),y,0,2*x),x,-1,2)
```

WolframAlphalla (<http://www.wolframalpha.com/>) osittaisderivaatat ja integraalit voidaan laskea miltei samoilla komennoilla.

Lähteitä ja kirjallisuutta

- [1] R. Adams, C. Essex: *Calculus, a Complete Course (7th ed.)*. Pearson Education, 2010.
- [2] T. Apostol: *Calculus, Volume 1 (2nd ed.)*. John Wiley & Sons, 1967.
- [3] T. Apostol: *Calculus, Volume 2 (2nd ed.)*. John Wiley & Sons, 1969.
- [4] T. Apostol: *Mathematical Analysis (2nd ed.)*. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [5] H. Anton, I. Bivens, S. Davis: *Calculus, Early Transcendentals (7th ed.)*. John Wiley & Sons, 2002.
- [6] A. Croft, R. Davison: *Mathematics for Engineers, A Modern Interactive Approach (3rd ed.)*. Pearson Education, 2008.
- [7] C. Edwards, D. Penney: *Calculus, Early Transcendentals, Matrix Version (6th ed.)*. Prentice-Hall, 2002.
- [8] G. Etgen: *Salas and Hille's Calculus: One and Several Variables (8th ed.)*. John Wiley & Sons, 1999.
- [9] S. Grossman: *Calculus (5th ed.)*. Harcourt Brace & Company, 1992.
- [10] G. James: *Modern Engineering Mathematics (4rd ed.)*. Pearson Education Limited, 2008.
- [11] J. Kauhanen: *Insinöörimatematiikka 1u, Periodi 1/2011–2012*. Luentomoniste.
- [12] J. Kauhanen: *Insinöörimatematiikka 3u, Periodi 3/2011–2012*. Luentomoniste.
- [13] R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards: *Calculus with Analytic Geometry (8th ed.)*. Houghton Mifflin Company, 2006.
- [14] R. Malek-Madani: *Advanced Engineering Mathematics with Mathematica and Matlab*. Addison-Wesley Longman, 1998.
- [15] A. Ostebee, P. Zorn: *Multivariable Calculus from Graphical, Numerical, and Symbolic Points of View (2nd ed.)*. Houghton Mifflin Company, 2004.

-
- [16] D. Poole: *Linear Algebra, a Modern Introduction (2nd ed.)*. Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [17] V. Purmonen: *Differentiaali- ja integraalilaskentaa, I osa*. Luentomoniste 45, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 2000.
- [18] J. Stewart: *Calculus, Early transcendentals (7th ed.), International metric version*. Brooks/Cole, 2012.
- [19] G. Thomas, M. Weir, J. Hass, F. Giordano: *Thomas' Calculus (11th ed.)*. Pearson Education, 2005.

Hakemisto

- alkupiste, 6
- avaruusintegraali, 114
- avaruuskäyrä, 6
- avoin joukko, 30
- avoin pallo, 14

- derivaatta, 44, 54
- derivaatta (käyrän), 8
- derivaattamatriisi, 43, 53
- derivaattavektori, 8
- derivoituvuus (käyrän), 8
- differentioituvuus, 41, 44, 54

- epäoleellinen integraali, 126, 127

- Fubinin lause, 93, 115

- gradientti, 65

- halkaisija, 31
- Hessen matriisi, 80
- hitausmomentti, 124

- implisiittifunktiolause, 71
- integraali, 92, 96, 114
 - määrätty, 90
- integroituvuus, 90, 92, 96, 114

- Jacobin determinantti, 63, 130
- Jacobin matriisi, 53
- jako, 89, 91
- jakopiste, 89
- jatkuva käyrä, 6
- jatkuvasti differentioituva funktio, 46,
56
- jatkuvuus, 20, 51

- kasautumispiste, 16
- kauttakulkupiste, 7
- kentän voimakkuus, 50
- keskiarvo, 107, 118

- ketjusääntö, 57
- kiekko, 14
- kiihtyvyys, 9
- kompakti joukko, 32
- komponenttifunktio, 5, 48
- koordinaattifunktio, 5, 48
- kriittinen piste, 34
- kuristusperiaate, 17
- kuvaaja, 11, 12
- kuvaus, 48
- käyrä, 6
 - alkupiste, 6
 - derivaatta, 8
 - jatkuvuus, 6
 - loppupiste, 6
 - parametrisointi, 6
 - sileä, 11
 - tangenttivektori, 9
 - yksinkertainen, 7
- käänteiskuvalause, 62

- Lagrangen kertoja, 72
- Lagrangen menetelmä, 72, 73, 75
- lineaarinen approksimaatio, 40, 41, 44,
55
- linearisointi, 40, 41, 44, 55
- loppupiste, 6

- maksimi, 29, 84
- massa, 123
- massakeskipiste, 124
- minimi, 29, 84
- muuttujanvaihto, 130, 133
- muuttujanvaihtokuvaus, 129, 132
- määrätty integraali, 90

- napakoordinaatit, 108
- napakoordinaattokuvaus, 48, 129
- nollajatkko, 96

- nopeus, 9
- osittaisderivaatta, 22, 26
 m. kertaluvun, 27
 toisen kertaluvun, 27
- osittaisderivoinnin vaihtosääntö, 28
- painopiste, 108
- pallo, 14
- pallokoordinaatit, 122
- pallopinta, 112
- palloympäristö, 14
- parametrisointi, 6
- pienimmän neliösumman menetelmä, 86
- pinta-alan suurennussuhde, 63, 110, 130
- polynomi, 21
- polynomiapproksimaatio, 77
- projisoituva avaruusjoukko, 116
- projisoituva tasojoukko, 99
- punkteerattu ympäristö, 14
- raja-arvo, 15, 50
- rajoite, 71
- rajoitettu joukko, 31
- rajoittamaton joukko, 31
- rationaalifunktio, 21
- reaaliarvoinen funktio, 5
- reaalifunktio, 5
- reuna, 30
- reunapiste, 30
- Riemannin summa, 89, 91, 114
- ruuvikäyrä, 7
- satulapiste, 33
- side-ehto, 71
- sidottu ääriarvottehtävä, 71
- sileä käyrä, 11
- sileä pinta, 31, 114
- sisus, 30
- sisäpiste, 26
- suljettu joukko, 30
- suljettu pallo, 14, 112
- sulkeuma, 30
- suora, 7
- supremum, 31
- suunnattu derivaatta, 63
- suurennussuhde, 63, 110, 120, 122, 130, 133
- syylinterikoordinaatit, 119
- syylinteripinta, 112
- tangenttisuora, 40
- tangenttitaso, 24
- tangenttitasoarvio, 41
- tangenttivektori, 9
- tasa-arvokäyrä, 12
- tasa-arvopinta, 12
- tasointegraali, 92, 96
- tasokäyrä, 6
- Taylorin kaava, 75, 76, 81
- Taylorin polynomi, 75, 77
- tilavuuden suurennussuhde, 63, 120, 122, 133
- tyhjennys, 126
- usean muuttujan funktio, 5
- vaihtosääntö (osittaisderivoinnin), 28
- Vandermondin matriisi, 87
- vauhti, 9
- vektoriarvoinen funktio, 5
- vektorikenttä, 49
- viipalointiperiaate, 93, 94, 115
- virittäjävektori, 7
- väliarvolause, 106, 118
- yhden muuttujan funktio, 5
- yhtenäinen joukko, 105
- yksinkertainen käyrä, 7
- äärellinen joukko, 31
- ääriarvo, 29, 84